АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ

3В1—3В324

*

U.I.C.C
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 3 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР канд. физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей	3В1
Математическая статистика	3В59
Теория игр, исследование операций и математическая экономика	—
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов	3В114
Численные и графические методы	3В166
Таблицы	—
Вычислительные машины и математические приборы	3В225
Применение вычислительных машин	3В293
Авторский указатель	

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская улица, 14

Технический редактор *Г. А. Шевченко*

Подписано в печать 17/III-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆

Печ. л. 4 Бум. л. 2 Уч.-изд. л. 11,4 Тираж 925 Зак. 437

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ.

Рефераты 3 В1—3 В324 **№ 3** **Март 1961 г.**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *О. В. Сарманов, Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

3 В1. На пути к объективистской теории вероятностей. Barankin Edward W. Toward an objectivistic theory of probability, «Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability». Vol. 5. Berkeley—Los Angeles, 1956, 21—52 (англ.)

Исходя из общих соображений о том, что в реальном мире все взаимосвязано, в том числе живое и неживое, автор считает возможным поставить вопрос о перестройке всей математики таким образом, чтобы в ее задачи входило также исследование действий живого организма, в том числе психической деятельности человека. На основании этих соображений делается попытка создания математической теории поведения человека. Каждый индивидуум рассматривается как комплекс стохастических процессов; поэтому понятие вероятности и другие понятия теории вероятностей играют существенную роль в теории поведения. Попутно рассматривается само понятие вероятности. В частности, содержится критика взглядов Мизеса, а также субъективистских взглядов Финетти, Савиджа и Рамзи. Исходные установки автора во многом путаны и неверны; теория громоздка; возможность применения теории к самым простейшим ситуациям в поведении человека сомнительна. Библ. 24 назв. Л. Е. Майстров

3 В2. Понятие вероятности. Vredenduin P. G. J. Het kansbegrip. «Euclides (Nederl.)», 1960, **35**, № 9, 273—282 (гол.)

3 В3. Замечание о компактных пространствах вероятностных мер. Mandl Petr. Note sur les espaces compacts des mesures de probabilité. «Časop. pěstov. mat.», 1960, **85**, № 2, 133—140 (франц.; рез. чешск., русск.)

Доказана компактность в слабой топологии пространства вероятностных бэровских мер на счетно-компактном топологическом пространстве. Аналогичный результат получен для борелевских мер, именно, если топологическое пространство нормально и счетно-компактно, то пространство регулярных вероятностных борелевских мер компактно относительно топологии И. Г. Блау. Произвольная окрестность меры P_0 в этой топологии есть пересечение конечного числа множеств вида $\{P: P(F) < P_0(F) + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и F замкнуто. (Аналогично задаваемая топология в множестве бэровских мер совпадает со слабой топологией). В качестве приложения полученных общих результатов доказывается следующая теорема: Пусть $F = X_{t \in T}[-\infty, \infty]$, A — σ-алгебра бэровских подмножеств F и $C \subseteq F$ замкнуто. Если конечномерные распределения процессов (F, A, P_n) слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса (F, A, P_0) и $P_n^*(C) = 1$ при $n = 1, 2, \ldots$, то и $P_0^*(C) = 1$. (Здесь P^* обозначает внешнюю меру, порожденную мерой P). В. В. Сазонов

3 В4. Вероятности, наблюдения и прогнозирование. Copeland A. H. Probabilities, observations and predictions. «Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability», Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 41—47 (англ.)

Автор ранее определил импликативные булевы алгебры (Math. Z., 1950, **53**, 285—290) и в их терминах трактовал обоснование теории вероятностей. В этой статье продолжаются исследования и указываются некоторые приложения, в частности метод проверки гипотез. G. A. Hunt

Перевод из Math. Revs. 1957, **18**, № 11, 940.

3 В5. Теория полугрупп Маркова. Neveu J. Theorie des semi-groupes de Markov. «Univ. Calif. Publs Statist.», 1958, **2**, № 14, pp. 319—394 (франц.)

Работа состоит из трех частей. В части I излагается общая теория полугрупп операторов в банаховых пространствах: связи между свойствами измеримости и непрерывности полугруппы, свойства ее резольвенты, теорема Хилла — Иосида и др. В части II рассматриваются полугруппы Маркова (т. е. положительные, сжимающие полугруппы операторов), причем основное внимание уделяется изучению действия полугрупп Маркова в пространствах бэровских функций на локально компактных абелевых группах. В части III изучаются полугруппы, отвечающие процессам диффузии на прямой. Основные теоремы этой части впервые были получены В. Феллером (РЖМат, 1957, 425). М. Г. Шур

3 В6. Распределение нормальных случайных элементов в пространстве Банаха. Fortet Robert. Normalverteilte Zufallselemente in Banachschen Räumen. Anwendungen auf zufällige Funktionen. «Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin», 1954, Berlin, 1956, 29—35 (нем.)

3 В7. Двойная задача о раскрашенных чашках. Newman Donald J. The double dixie cup problem. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 1, 58—61 (англ.)

Пусть некоторого рода чашка раскрашена одним из n способов. Двойная задача о раскрашенных чашках заключается в следующем: Сколько раз следует поку-

пать такие чашки случайным образом, чтобы получить два полных комплекта узоров. Авторы решают не эту, а более общую m-задачу: т. е. находят математическое ожидание $E_m(n)$ числа необходимых извлечений с возвращением из генеральной совокупности объема n для получения m наборов по n различных элементов, т. е. m копий генеральной совокупности. Приближенно при $n\to\infty$ $E_m(n)=n[\log n+(m-1)\log\log n+O(1)]$.

Б. А. Рогозин

3 В8. К подсчету вероятности появления точно k из n независимых событий. White Robert P., Greville T. N. E. On computing the probability that exactly k of n independent events will occur. «Soc. Actuar. Trans.», 1959, **11**, № 29A-29B, 88—95. Discuss., 96—99 (англ.)

Указываются два способа подсчета вероятностей появления точно k и по крайнем мере k из n независимых событий. Оба способа основаны на использовании рекуррентных соотношений. Рекуррентные соотношения, соответствующие первому способу, получаются элементарным путем. Рекуррентные соотношения, соответствующие второму способу, получены с помощью метода производящих функций. Сформулированы условия, зависящие от соотношения между n и k и определяющие выгодность одного метода по сравнению с другим в смысле количества операций, производимых при подсчете. Оба метода применяются к вычислению вероятностей продолжительностей человеческих жизней.

В. Н. Сачков

3 В9. Задача коллекционера. Barton D. E., David F. N. A collector's problem. «Trab. estadíst.», 1959, **10**, № 2, 75—88 (англ.; рез. исп.)

Проблема коллекционирования формулируется как задача определения распределений некоторых случайных величин, значения которых зависят от результатов случайного заполнения шарами некоторого количества урн. Рассматриваются два аспекта этой задачи. В общем виде первый аспект задачи формулируется так: Имеется N одинаковых урн и еще одна урна. Все урны неограниченной емкости. Вероятность того, что случайно брошенный шар будет попадать в любую из N одинаковых урн, есть $1/(N+C)$. Вероятность попадания шара в контрольную урну есть $C/(N+C)$. n шаров бросаются независимо. Определяется вероятность того, что $n-j$ шаров попадут в контрольную урну, а j шаров—в оставшиеся N урн, заняв $N-k$ урн, и k урн оставив пустыми. Упомянутая вероятность подсчитывается также при условии, что в контрольном ящике по крайней мере $n-j$ шаров. Для обоих распределений вычисляются факториальные моменты. Другой так называемый «последовательный» аспект задачи формулируется следующим образом. Пусть шары бросаются случайным и независимым образом по одному в урны до тех пор, пока не наступит одно из двух событий: либо по крайней мере $N-k$ урн будут заняты, а в контрольной урне будет ровно b шаров, либо точно $N-k$ урн будут заняты, а в контрольной урне будет по крайней мере b шаров. Находится распределение n — числа брошенных шаров. Рассматриваются некоторые частные случаи данного распределения, связанные с приложениями к задачам теории стрельбы и задачам коллекционирования. Находится асимптотическое выражение при $N\to\infty$ для распределения n в двух случаях: 1) отношения $C/(N+C)$ и k/N имеют конечные пределы; 2) $C/(N+C)$ имеет конечный предел, а k фиксировано. В первом случае распределение n является асимптотически нормальным, во втором случае оно стремится к двойному экспоненциальному закону. В заключение полученные результаты применяются к одной задаче экстремального типа, рассмотренной авторами ранее.

В. Н. Сачков

3 В10. Распределение некоторого действительного корня уравнения n-й степени с действительными случайными коэффициентами. Gaede Karl-Walter. Die Verteilung von gewissen reelen Wurzeln der Gleichung n—ten Grades mit reelen Zufallskoeffizienten. «Monatsh. Math.», 1959, **63**, № 4, 359—367 (нем.)

Пусть $P(x)$ — многочлен n-й степени с действительными коэффициентами, некоторые из которых могут быть постоянными числами, а остальные — случайные величины. Находится функция распределения отдельного действительного корня многочлена $P(x)$ в специальном случае, когда известно, что в некотором интервале действительной оси может лежать только один этот корень. Основная теорема дает достаточное условие для того, чтобы указанная ситуация имела место.

Е. Н. Кузьмин

3 В11. Нули случайного полинома. Hammersley J. M. The zeros of a random polynomial. «Proc. 3rd Berkeley Sympos. «Math. Statistics and Probability». Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 89—111 (англ.)

Автор дает, по крайней мере, принципиальное решение задачи определения распределения корней уравнения

$$g(z)=\sum_{j=0}^{n} c_j z^j=0,$$

где комплексные коэффициенты c_j имеют заданное совместное распределение. В ч. I показывается, что если последовательность распределений для коэффициентов сходится к предельному, то последовательность соответствующих распределений для корней сходится к пределу. Выводятся формулы для плотностей различных совместных распределений корней, в предположении, что коэффициенты имеют непрерывную плотность и моменты всех порядков. Поскольку каждое распределение есть предельное для таких распределений, то это дает ответ на поставленную задачу. Автор определяет концентрированное распределение корней, которое вкратце можно описать как меру множества, равную $\frac{1}{n}\alpha$, где α — число корней, попадающих в это множество. Явные формулы для концентрированного распределения корней даются в том случае, когда коэффициенты имеют произвольное невырожденное нормальное распределение в комплексном $(n+1)$-пространстве и в случае вещественного $(n+1)$-пространства. Последнее обобщает результат Каца (Kac, Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 314—320), относящийся к математическому ожиданию вещественных нулей у полинома с независимыми одинаково распределенными коэффициентами.

H. E. Trotter

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 941.

3 В12. Логарифмический ряд плотностей распределения. I. Bertaut E. F. Ordre logarithmique des densités de repartition. I. «Acta crystallogr.», 1960, **13**, № 7, 546—552 (франц.; рез. англ.)

Дано новое разложение в сходящийся ряд логарифма функции плотности распределения для одномерного и многомерного случаев. Члены ряда упорядочены так, что полиномы степени s от переменных функций плотности имеют в качестве множителя ε^{s-2}, где $\varepsilon=N^{-1/2}$.

П. А. Строганов

3 В13. О законах Коши и Гаусса. Laha R. G. On the laws of Cauchy and Gauss. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1165—1174 (англ.)

Известно, что отношение двух независимых, нормально распределенных случайных величин с параметрами $(0, \sigma)$ следует закону Коши, симметричному относительно начала координат. Автор изучает общие свойства функции распределения этих случайных величин и доказывает теорему 1. Пусть x и y — две независимые и одинаково распределенные случайные величины, имеющие функцию распределения $F(x)$. Пусть частное $w=x/y$ следует закону Коши, симметричному относительно начала $w=0$. Тогда $F(x)$ имеет следующие общие свойства: 1) симметрична относительно начала $x=0$; 2) аб-

солютно непрерывна и имеет непрерывную функцию плотности $f(x)=F'(x)>0$; 3) случайная величина x имеет неограниченный размах; 4) функция плотности $f(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^\infty f(x)\,f(ux)\,x dx=\frac{C_0}{1+u^2}$$

для всех u, C_0 — константа. Для характеризации нормального распределения применима теорема 2, которая получается, если еще добавить следующие два условия: 1) $F(x)$ имеет конечные моменты всех порядков; 2) $\varphi(z)=E\,(e^{iz|n|x|})$ не имеет нулей в ее области регулярности (z — комплексное); тогда $F(x)$ — нормальная функция распределения. Приводится пример негауссовской функции распределения $F(x)$, имеющей конечные моменты всех порядков, где x/y следует закону Коши (нарушено условие 2 предыдущей теоремы).

В. И. Бабкин

3 В14. Локальные свойства функций, являющиеся случайными рядами Фурье. Kahane J. P. Propriétés locales des fonction à séries de Fourier aléatoires. «Studia math.», 1960, **19**, № 1, 1—25 (франц.)

Автор рассматривает ряды Фурье вида

$$\sum_1^\infty R_n\cos(nt+\Phi_n)=F(t), \qquad (1)$$

где амплитуды R_n и фазы Φ_n являются независимыми случайными величинами, причем считается, что $M\cos\Phi_n=M\sin\Phi_n=0$ для всех n. Главным образом, автора интересует вопрос о равномерной сходимости ряда и некоторые свойства траекторий $F(t)$ такие, например, как их ограниченность и непрерывность, или, скажем, принадлежность их к классу функций, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной α. В качестве иллюстрации содержащихся в работе результатов, приведем следующие две теоремы (теоремы 2 и 3).

1. Пусть случайные величины R_n таковы, что для каждой из них существует постоянная τ_n такая, что $Me^{2yR_n}\leqslant e^{2\tau_n^2y^2}$ при всех действительных y. Пусть τ_n есть минимальная постоянная, удовлетворяющая только что описанному свойству, и $t_k^2=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\tau_n^2$. Если $\sum_{i=1}^\infty\left(2^i\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}t_k^2\right)^{1/2}<\infty$, то с вероятностью 1 ряд (1) сходится равномерно по t и его сумма с вероятностью 1 является непрерывной.

2. Положим $\sigma_n^2=MR_n^2$, $s_i^2=\sum_{2^i+1}^{2^{i+1}}\sigma_n^2$. Пусть $\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{MR_n^4}{\sigma_n^4}<\infty$ и $\inf_{u,\,n}M\cos^2(u+\Phi_n)>0$. Если $\sum_1^\infty s_i<\infty$, то с вероятностью 1 ряд (1) представляет собой ряд Фурье ограниченной функции $F(t)$.

Ю. А. Розанов

3 В15. Сходимость составных распределений. Teicher Henry. On the convergence of projected distributions. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1958, **9**, № 2, 79—86 (англ.)

Пусть X_n, Y_n ($n=1,2,\ldots$) — вещественные случайные величины с законами распределения $L(X_n)$, $L(Y_n)$ и характеристическими функциями $f_n(t)$ и $g_n(t)$. Предположим, что существуют функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ такие, что $L(X_n)\to F$, $L(Y_n)\to G$, т. е. X_n и Y_n сходятся по распределениям. Ищутся условия, при которых $L(cX_n+Y_n)\to F\left(\frac{x}{c}\right)*G(x)$, или (что равносильно)

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{cX_n+Y_n}(t)=f(ct)\,g(t) \qquad (1)$$

для всех вещественных t и $c\neq0$. Получены некоторые достаточные условия. Например, теорема 1. Пусть для каждого $n=1,2,\ldots$ $f_n(t)\in I$, $g_n(t)\in I$, $f(ct)\,g(t)\in I_1$ и для каждого целого k последовательности $\left\{f_n^{(k)}(0)\right\}$, $\left\{g_n^{(k)}(0)\right\}$ ограничены; тогда для того чтобы (1) имело место, достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{r-1}\binom{r}{j}c^j\operatorname{cov}\left(X_n^jY_n^{r-j}\right)=0$$

для всех положительных целых r (I — класс всех бесконечно дифференцируемых характеристических функций, а I_1 — его некоторый подкласс). В. П. Скитович

3 В16. Нижняя оценка для скорости сближения распределений сумм с совокупностью неограниченно делимых законов. Мешалкин Л. Д. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 4, 766—768

Обозначим через $\mathfrak{G}$ совокупность безгранично делимых функций распределения (ф. р.) и пусть

$$\Psi(n)=\sup_F\inf_{G\in\mathfrak{G}}\sup_x|F^n(x)-G(x)|,$$

$$\Psi_1(n)=\sup_{p\leqslant1}\inf_{G\in\mathfrak{G}}\sup_x|F_p^n(x)-G(x)|.$$

Здесь $F^n(x)=\underbrace{F(x)*\ldots*F(x)}_{n\text{ раз}}$ — ф. р. суммы n независимых случайных величин, каждая из которых имеет ф. р. $F(x)$, а

$$F_p(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ 1-p, & 0<x\leqslant1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

В общих чертах намечен ход доказательства следующей теоремы: Для любой функции $u(n)\to0$ ($n\to\infty$) найдется такое n_0, что для $n>n_0$

$$\Psi_1(n)>n^{-2/3}(\ln n)^{-7/2}\,u(n).$$

Отсюда вытекает, что $\Psi(n)>Cn^{-2/3}(\ln n)^{-4}$, где $C>0$ — абсолютная константа. И. А. Ибрагимов

3 В17. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. III. Достаточные условия (счетный ограниченный пуассонов спектр. Неограниченный спектр. «Устойчивость»). Линник Ю. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 2, 150—171 (рез. англ.)

Доказывается достаточность условий основной теоремы 1 (РЖМат, 1959, 620) для счетного ограниченного пуассонова спектра и в одном случае неограниченного пуассонова спектра. Кроме того, доказывается теорема 5: Пусть K_F — совокупность безгранично делимых законов с ограниченным пуассоновым спектром, содержащимся в спектре закона $F\in I_1$; пусть $\{F_j\}$ — последовательность законов таких, что

$$\sup_x|F_j(x)-F(x)|=\varepsilon_j\to0$$

при $j\to\infty$ и $F_j=F_{1j}*F_{2j}$; тогда

$$\inf_{F^{(1)}\in K_F}\sup_x|F_{1j}(x)-F^{(1)}(x)|=\delta_j\to0$$

и то же касается F_{2j}. В. П. Скитович

3 В18. О неравенствах Чебышева. Исии. «Токэй сури кэнкюсё ихо», «Proc. Inst. Statist. Math.», 1959, **7**, № 1, 123—143 (японск.; рез. англ.)

Краткий обзор литературы по неравенствам типа Чебышева. В § 1 приводится 45 неравенств с короткими пояснениями и примерами. В § 2 подвергаются обсуждению некоторые вопросы и высказываются идеи о будущем развитии теории. Результаты § 1 компактно оформлены в конце работы. Резюме автора

3 В19. О теореме восстановления. Morimura Hidenori. On a renewal theorem. «Kodai Math. Semin. Repts», 1956, 8, № 3, 125—133 (англ.)

Автор доказывает следующую теорему: Пусть S_n есть сумма n взаимно независимых случайных величин со строго положительными математическими ожиданиями. Предполагается, что при $n\to\infty$ μ_n - среднее математических ожиданий частичных сумм, сходится и что сходятся в смысле Чезаро вторые моменты и дисперсии частичных сумм. Вводятся еще другие условия, которые равномерно ограничивают величины частичных сумм. Тогда доказывается, что

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} dx \sum_1^{\infty}\left(n-\frac{x}{\mu_n}\right) P\{x < S_n \leqslant x+h\}$$

существует. Дается точное выражение для этого предела. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 942.

3 В20. Некоторые теоремы обобщенной теории восстановления. I. Hatori Hirohisa. Some theorems in an extended renewal theory. I. «Kodai Math. Semin. Repts», 1959, **11**, № 3, 139—146 (англ.)

Распространяются некоторые результаты теории восстановления (Doob J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1947, **63**, 422—438) в следующих предположениях: 1) $x_1, x_2, \ldots$ являются неотрицательными взаимно независимыми случайными величинами, 2) $x_2, x_3, \ldots$ имеют конечные математические ожидания $a_2, a_3, \ldots$ соответственно и существует постоянная L такая, что $a_\nu \geqslant L$, $\nu = 2, 3, \ldots$, 3) $x_2, x_3, \ldots$ имеют конечные дисперсии $\sigma_2^2, \sigma_3^2, \ldots$ и существует постоянная k такая, что $\sigma_\nu^2 \leqslant k < \infty$ для $\nu = 2, 3, \ldots$, 4) существует $\lim\limits_{n\to\infty}(a_2+\ldots+a_n)/(n-1)=a$, где a может быть $+\infty$. Пусть $N(t)$ — число последовательных частных сумм из x_i, меньших t, и определим процесс $x(t) = t - \sum_{\nu=1}^{N(t)} x_\nu$, если $N(t) \geqslant 1$, и $x(t) = x_0 + t$, если $N(t) = 0$, где x_0 — случайная величина. Отметим следующие из полученных результатов:

Теорема 1. Если $x_1, x_2, \ldots$ являются случайными величинами, для которых выполнены предположения 1)—4), то $P\{\lim\limits_{t\to\infty} N(t)/t = 1/a\} = 1$, $E\{N(t)^\alpha\} < \infty$ и $\lim E\{N(t)^\alpha\}/t^\alpha = 1/a^\alpha$ для $\alpha > 0$.

Теорема 2. Если $a < \infty$ и выполнены предположения теоремы 1, то $P\{\lim x(t)/t = 0\} = 1$ и, если $E\{x_0\} < \infty$, то $\lim E\{x(t)\}/t = 0$. Кроме того, в предположениях применимости к последовательности $x_2-a_2, x_3-a_3, \ldots$ закона повторного логарифма и выполнения условий $\sum_{\nu=2}^{n}\sigma_\nu^2 \to\infty$ при $n\to\infty$ и $(a_2+\ldots+a_n)/(n-1) = a + o\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right)$ при $n\to\infty$, получаются теоремы более полно описывающие поведение $N(t)$ и $x(t)$. В заключение приводится формулировка многомерного аналога теоремы 1, именно, пусть $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$; $\ldots z_1, z_2, \ldots$ — неотрицательные взаимно независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$; $\ldots$; $c_1, c_2, \ldots$ соответственно, условия 1)—4) предполагаются выполненными для каждой последовательности и $a \geqslant b \geqslant \ldots \geqslant c$. Тогда, определяя $M(t)$ как случайную величину такую, что

$$\max\left\{\sum_{\nu=1}^{M(t)} x_\nu, \sum_{\nu=1}^{M(t)} y_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{M(t)} z_\nu\right\} < t \leqslant \max\left\{\sum_{\nu=1}^{M(t)+1} x_\nu, \sum_{\nu=1}^{M(t)+1} y_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{M(t)+1} z_\nu\right\},$$

автор получает $P\{\lim M(t)/t = 1/a\} = 1$ и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\{M(t)^\alpha\}}{t^\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$$

для $\alpha > 0$. Б. А. Рогозин

3 В21. Некоторые теоремы обобщенной теории восстановления. II. Hatori Hirohisa. Some theorems in an extended Renewal theory. II. «Kodai Math. Semin. Repts», 1960, **12**, № 1, 21—27 (англ.)

Устанавливается, что выполнение соотношения $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{E\{N(t)^\alpha\}}{t^\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$ для всех $\alpha > 0$ (здесь и дальше используются обозначения реферата предыдущей работы этого же автора (см. реф. 3В20)) эквивалентно каждому из двух соотношений

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P\{S_n \leqslant t\} = \frac{1}{(\alpha+1)a^{\alpha+1}}$$

для $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{\alpha+1}}\int_{-\infty}^{T} dt\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P\{t < S_n \leqslant t+h\} = \frac{h}{(\alpha+1)a^{\alpha+1}},$$

где $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$. Эти теоремы и некоторые теоремы упоминавшейся работы этого же автора переносятся на более сложный случай; именно, пусть $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$; $\ldots$; $z_1, z_2, \ldots$ — взаимно независимые неотрицательные случайные величины с конечными математическими ожиданиями $a_1, a_2 \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$; $\ldots$; $c_1, c_2 \ldots$; соответствующие условия 1)—4) (см. часть I) предполагаются выполненными. Тогда, определяя $M(t)$ как число величин $V_1, V_2, \ldots$, которые меньше чем t, где $V_n = f(S_n, T_n, \ldots, U_n)$, $T_n = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu$, $\ldots$ и $U_n = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$, получают

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\{M(t)^\alpha\}}{t^\alpha} = \frac{1}{(F(a,b,\ldots,c)^\alpha)}$$

для $\alpha > 0$, где $f(x, y, \ldots, z)$ является неубывающей. Причем существует постоянная γ такая, что $f(x, y, \ldots, z) \geqslant \gamma\cdot\min(x, y, \ldots, z)$ для всех x, y, z и

$$\lim\frac{1}{n} f(xn, yn, \ldots, zn)$$

существует при всех $x, y, \ldots, z$ и равен непрерывной функции $F(x, y, \ldots, z)$. Б. А. Рогозин

3 В22. Заметка о теореме восстановления. Hatori Hirohisa. A note on a renewal theorem. «Kodai Math. Semin. Repts», 1960, **12**, № 1, 28—37 (англ.)

Пусть x_i ($i = 1, 2, \ldots$) — независимые случайные величины, функции распределения которых $F_i(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_i(x) = m_i > 0, \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-s_0 t} dF_i(t) < \infty$$

для некоторого $s_0 > 0$ и далее $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{A}^{\infty} x dF_i(x) = 0$ и $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{-A} e^{-s_0 x} dF_i(x) = 0$ равномерно относительно i. При этих условиях, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = m > 0,$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha P(s_n \leqslant t) = \frac{a}{(\alpha+1)m^{\alpha+1}}$$

и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{\alpha+1}}\int_{-\infty}^{T} dt\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\alpha P(t < s_n \leqslant t+h) = \frac{ah}{(\alpha+1)m^{\alpha+1}}$$

при $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, где $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, $a_n = b_n - c_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем b_n и c_n ограничены снизу и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i = b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i = c,$$

т. е. $a = b - c$. Б. А. Рогозин

3 В23. Оценка приближения в одной предельной теореме теории вероятностей. Shapiro J. M. Error estimates for certain probability limit theorems. «Ann. Math. Statistics», 1955, **26**, № 4, 617—630 (англ.)

Рассматривается последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин x_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с конечными дисперсиями такая, что функции распределения $F_n(x)$ сумм $x_{n1} + \ldots + x_{nk_n}$ сходятся при $n \to \infty$ к собственному безгранично делимому закону $F(x)$ со средним μ, дисперсией σ^2 и функцией Хинчина $G(u)$. В терминах характеристик μ_n, σ_n^2 и $G_n(u)$ безгранично делимых законов, сопровождающих $F_n(x)$, дается оценка величины $M_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$. В общем случае приводимая автором оценка мало эффективна и не позволяет судить о скорости сближения с предельным законом. В частных случаях сближения с законами Гаусса и Пуассона дополнительные предположения позволяют эту оценку сделать более прозрачной. В формуле (3.1) опечатка: вместо $|u_n - u|$ должно быть $|\mu_n - \mu|$. В. М. Золотарев

3 В24. Заметка о центральной предельной теореме Дёблина. Kendall David G. A note on Doeblin's central limit theorem. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1957, 8, № 6, 1037—1039 (англ.)

Рассматривается цепь Маркова со счетным числом состояний (1, 2, ...) и стационарными переходными вероятностями, представляющая собой положительный возвратный класс. Пусть $f(\cdot)$ является любой действительной функцией, областью определения которой являются целые положительные числа, x_m, $m = 0, 1, \ldots$, обозначает состояние системы в момент m, $S_n = \sum_{m=0}^{n} f(x_m)$. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ — последовательные моменты попадания в состояние j; далее положим

$$\mu_j = M\left\{\sum_{m=v_1+1}^{v_2} f(x_m)\right\}$$

и

$$\sigma_j^2 = M\left\{\sum_{m=v_1+1}^{v_2} f(x_m) - \frac{\mu_j}{m_{jj}}(v_2 - v_1)\right\}^2,$$

где m_{jj} — среднее время возвращения в состояние j. При этих обозначениях и предположениях устанавливается следующая теорема: Если μ_j существуют и $0 < \sigma_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, то

$$P\left\{\frac{S_n - n\frac{\mu_j}{m_{jj}}}{\sqrt{\sigma_j^2/m_{jj}\cdot n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

при $n \to \infty$.

Этот результат представляет обобщение центральной предельной теоремы, доказанной Дёблином (Doeblin W., Bull. Soc. Math. France, 1938, 66, 210—220).

Б. А. Рогозин

3 В25. Вероятности больших уклонений для сверток. Blackwell David, Hodges J. L., Jr. The probability in the extreme tail of a convolution. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1113—1120 (англ.)

Рассматривается последовательность $x_1, x_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин с шагом 1; предполагается существование преобразования Лапласа для их общей функции распределения в окрестности 0. Пусть целое число a удовлетворяет соотношению $E(x_1) < a < \sup x_1$, $\varphi(a,t) = Ee^{t(x_1-a)}$ и $\min_t \varphi(a,t) = m(a) = \varphi(a, t^*(a))$, $Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных независимых целочисленных случайных величин с общей функцией распределения $P(Y_1 = x) = \frac{P(x_1 = x)\, e^{t^*(a)(x-a)}}{m(a)}$; μ_2, μ_3, μ_4 — центральные моменты Y_1 2-,3-,4-го порядков соответственно. Тогда

$$P\{x_1 + \ldots + x_n = na\} =$$

$$= \frac{[m(a)]^n}{\sqrt{2\pi n \mu_2}} \left[1 + \frac{1}{8n}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 - \frac{5\mu_3^2}{3\mu_2^3}\right)\right](1 + o(n^{-2})).$$

$$P\{x_1 + \ldots + x_n \geqslant na\} =$$

$$= \frac{[m(a)]^n}{\sqrt{2\pi n \mu_2}} \left[1 + \frac{1}{8n}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 - \frac{5\mu_3^2}{3\mu_2^3}\right)\right] \frac{1}{1-z} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{1}{2n}\left[\frac{(z\mu_3/\mu_2) + z(1+z)/(1-z)}{(1-z)\mu_2}\right]\right\}(1 + o(n^{-2})),$$

где $z = e^{-t^*(a)}$. Б. А. Рогозин

3 В26. Теорема о сходимости дискретных вероятностных распределений. Okamoto Masashi. A convergence theorem for discrete probability distributions. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 107—112 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность целочисленных случайных величин, $P\{\xi_n = r\} = p_n(r)$, где r — целое число, $\sum_{r=-\infty}^{\infty} p_n(r) = 1$. При этих условиях показывается, что если существует последовательность $\mu_1, \mu_2, \ldots$ действительных чисел и плотность распределения $f(x)$ такие, что $\lim \sqrt{n}\, p_n([\mu_n + \sqrt{n}\, x]) = f(x)$ для любого x, то функция распределения $(\xi_n - \mu_n)/\sqrt{n}$ сходится к функции распределения с плотностью $f(x)$. Дается несколько примеров применения этой теоремы и ее многомерного аналога, среди которых необходимо отметить нахождение предельных распределений для некоторых статистик, связанных с таблицами сопряженности.

Б. А. Рогозин

3 В27. О спектрах укрупненных стохастических матриц. Сарманов О. В., Захаров В. К. «Докл. АН СССР», 1959, **128**, № 2, 243—245

Рассматриваются две зависимые конечные схемы событий $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ с симметрической корреляционной таблицей $\{p_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где для любых i, j

$$0 \leqslant p_{ij} = P(A_i \cap B_j), \quad p_i = P(A_i) = P(B_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_{ij} > 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Спектр собственных чисел симметризуемой стохастической матрицы $P = \|p_{ij}/p_i\|^n$ имеет вид: $1/\lambda_0 = 1 \geqslant 1/|\lambda_1| \geqslant 1/|\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant 1/|\lambda_{n-1}|$ с собственными векторами $x_0 = (1, 1, \ldots, 1)$, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, которые ортогональны и нормированы с весами $p_1, \ldots, p_n$. Рассматриваются укрупненные схемы событий, получающиеся объединением в одно событие событий A_1 и A_2, а также B_1 и B_2.

Основная теорема. Собственные числа $1/\lambda_i'$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ укрупненной стохастической матрицы являются средними взвешенными из собственных чисел исходной матрицы: $1/\lambda_i' = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{a_{ik}^2}{\lambda_k}$, причем

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}^2 = 1 \ (i = 1, \ldots, n-2).$$

Для неотрицательных весов a_{ik}^2 получаются явные выражения, независящие от $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_{n-1}$. Так, например,

$$a_{11}^2 = 1 - \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}(x_{11} - x_{12})^2.$$

Ф. Р. Гантмахер

3 В28. Построение стохастических матриц, имеющих такие же характеристические значения, как и у заданной матрицы. Parodi Maurice. Sur la formation de matrices stochastiques ayant pour valeurs caractéristiques celles d'une matrice donnée. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 20, 3258—3259 (франц.)

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица n-го порядка с характеристическими числами, по модулю не превосходящими единицы. Указан простой способ построения стохастической матрицы $(n+1)$-го порядка, n характеристических значений которой такие же, как и у A. Достаточные условия применимости метода: существуют положительные числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что: 1) $a_{ij} + a_j \geqslant o$, $i, j = 1, \ldots, n$, 2) $\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} + a_k) \leqslant 1$; $j = 1, \ldots, n$; 3) $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1$.

Р. Ф. Матвеев

3 В29. Процессы очереди со многими обслуживающими устройствами, пуассоновским потоком клиентов и показательным временем обслуживания. Karlin Samuel, McGregor James. Many server queueing processes with poisson input and exponential service times. «Pacif. J. Math.», 1958, 8, № 1, 87—118 (англ.)

Автор определяет очередь как (стационарный марковский) процесс рождения и смерти, в котором интенсивности рождения и смерти λ_j и μ_j удовлетворяют условиям: $\mu_0 = 0$, $\lambda_j = \lambda$ для всех j. Состояние системы истолковывается как длина очереди, в которой временные интервалы между прибытиями клиентов распределены по отрицательно показательному закону с параметром λ, а времена обслуживания имеют те же распределения с параметром μ_n, где n — длина очереди. Случай n обслуживающих устройств (0. у) (с отрицательно показательным временем обслуживания) получается при $\mu_k = k\mu$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $\mu_k = n\mu$ для $k \geqslant n$. Очередь с n о. у. общего типа потоком клиентов и показательным временем обслуживания была изучена Д. Кендаллом (РЖМат, 1956, 3218) в состоянии стационарности, а с общим потоком клиентов, общим временем обслуживания — Кифером и Вольфовицем (РЖМат, 1956, 3216). Авторы в первую очередь занимаются анализом нестационарных задач, связанных с очередью с n о. у. В предыдущей статье авторами для процесса рождения и смерти (РЖМат, 1958, 9043) было получено представление $p_{ij}(t) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$, где $\pi_0 = 1$, $\pi_n = \lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}/\mu_1 \ldots \mu_n$, $Q_j(x)$ — полиномы, удовлетворяющие рекурентному соотношению, и ψ — положительная регулярная мера. В этой статье $Q_j(x)$ и спектральная мера ψ (которая единственна в случае процесса очереди) определяются для различных процессов. В случае неограниченного числа о. у. $Q_j(x)$ приводятся к известным полиномам Пуассона—Шарлье, а $\psi(x)$ представляет пуассоновское распределение. В случае n о. у. $Q_j(x)$ представляют комбинации полиномов Чебышева и Пуассона—Шарлье. Детальному разбору подверглись случай одного и двух о. у.; вычислены распределения некоторых случайных величин, как-то: длина периода занятости, число клиентов, обслуженных в период занятости и т. п. Аналогичные вопросы рассматриваются и для случая n о. у. Наконец, на основе результатов об очереди с бесконечным числом о. у. выведены формулы для полиномов, связанных с задачами случайного блуждания.

A. Prékopa

3 В30. Процессы Galliher'a (кустистое распределение Пуассона). Kaufmann A., Cruon R. Le processus de Galliher. Distribution de Poisson «par grappes». «Rev. franç. rech. opérat.», 1959, **3**, № 12, 137—144 (франц.)

Изучаются так называемые кустистые пуассоновские процессы, отличающиеся от обычных пуассоновских лишь тем, что величина скачка не равна обязательно единице, а принимает значения 1, 2, ... с вероятностями соответственно $p(1)$, $p(2)$, ... (иначе говоря, одновременно могут происходить 1, 2, ... скачков). В статье предполагается: $p(k) = \varphi(1-\varphi)^{k-1}$ $k \geqslant 1$: $0 < \varphi \leqslant 1$. Получена формула для вероятности $P_n(\tau)$ того, что на отрезке времени τ произойдет ровно n скачков. Найдена также функция распределения вероятностей длины интервала между двумя скачками (здесь «скачком» называется скачок единичной величины). Вычислены математическое ожидание и дисперсия числа скачков и длины интервала между скачками. В заключении к статье указаны задачи, в которых необходимо появляются кустистые пуассоновские процессы.

Р. Ф. Матвеев

3 В31. О стохастической модели каскада. Urbanik K. On a stochastic model of a cascade. «Studia math.», 1958, **16**, № 3, 237—267 (англ.)

Каскадом называется процесс распада или размножения частиц, в котором каждая частица в случайный момент времени распадается на случайное число частиц того же рода, причем каждая частица распадается независимо от момента своего возникновения или момента распада, а также независимо от прошлого развития процесса и от размножения других частиц, существующих в данный момент. Известно, что процесс изменения числа частиц $\omega(t)$, существующих в момент t, представляет собой однородный марковский процесс с бесконечным числом состояний, так называемый ветвящийся процесс. Предлагается следующее более полное математическое описание каскада, учитывающее не только число частиц, но и размножение каждой индивидуальной частицы. Предполагается, что каскад порождается одной частицей. Каждой частице ставится в соответствие система пар натуральных чисел $\xi = <(1,1), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)>$, так что $\xi_0 = <(1,1)>$ соответствует порождающей частице; $\xi_1 = <(1,1), (x_1, y_1)>$ — частице с номером x_1, возникшей при распаде частицы ξ_0 на y_1 частиц; $\xi_2 = <(1,1), (x_1, y_1), (x_2, y_2)>$ — частице с номером x_2, возникающей при распаде частицы ξ_1 на y_2 частиц и т. д. Рассматриваются функции $v(\xi)$ на множестве всех возможных систем ξ, значениями которых являются полуинтервалы (возможно нулевой длины) на оси времени, представляющие собой период жизни данной частицы. При этом системам ξ, которым не могут соответствовать частицы, ставятся в соответствие полуинтервалы нулевой длины. Затем на множестве функций $v(\xi)$ строится вероятностная мера, соответствующая физической картине каскада. При этом число частиц $\omega(t) = \sum_\xi \chi_{v(\xi)}(t)$, где

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0, & t \overline{\in} [a, b), \\ 1, & t \in [a, b). \end{cases}$$

Доказывается, что случайный процесс $\omega(t)$ есть ветвящийся процесс и что, наоборот, для каждого ветвящегося процесса можно построить модель каскада такую, что процесс $\omega(t)$, определенный равенством (1), будет идентичен с этим ветвящимся процессом.

В. А. Волконский

3 В32. Супремум и инфимум пуассоновского процесса. Pyke Ronald. The supremum and infimum of the Poisson process. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 2, 568—576 (англ.)

Пусть $\{X(t);\ t \geqslant 0\}$ — сепарабельный пуассоновский процесс с таким изменением, что $\ln E(\exp i\omega X(t)) = -it\omega\alpha + \lambda t(e^{i\omega} - 1)$ для всех вещественных ω и α,

$\lambda > 0$. Обозначим $\sigma(x, T) = P[\sup_{0<t<T} X(t) \leqslant x]$ и $\mu(x, T) = P[-\sup_{0<t<T}(-X(t)) \leqslant x]$. Тогда для указанного процесса

$$\sigma(x, T) = e^{-\lambda T} \sum_{n=0}^{[\alpha T + x]} \frac{(\alpha T + x - n)(\lambda/\alpha)^n}{n!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{[x]} C_n^j (j - x)^j (\alpha T + x - j)^{n-j-1}$$

для всех $x \geqslant 0$,

$$\mu(x, T) = -x \sum_{j=0}^{[\alpha T + x]} \exp\left\{-\frac{\lambda(j-x)}{\alpha}\right\} \frac{(\lambda/\alpha)^j (j-x)^{j-1}}{j!}$$

для всех $x \leqslant 0$. Даны некоторые применения к теории очередей. В. П. Скитович

3 В33. Инвариантная вставка. Случайное блуждание и рассеяние. II. Bellman Richard, Kalaba Robert. Invariant imbedding, random walk and scattering. II. Discrete versions. «J. Math. and Mech.», 1960, **9**, № 3, 411—419 (англ.)

Рассматривается случайный процесс, в котором частица, которая движется на единицу вправо или влево за один шаг по целочисленным точкам отрезка $[a, b]$, может, кроме того, находиться в N различных состояниях (например, N различных уровней энергии). Пусть $p_{ij}(x)$ есть вероятность того, что частица, начинающая движение из точки x и находясь при этом в состоянии i, перейдет на одну единицу влево и перейдет при этом в состояние j ($i, j = 1, 2, \ldots, N$), а $q_{ij}(x)$ — соответствующая вероятность для движения вправо. Вводя в рассмотрение функцию $u_{ij}(a, x)$ — вероятность того, что частица, начинающая движение из точки x в состоянии i, достигнет точку a в состоянии j раньше, чем точку b в каком-нибудь состоянии, авторы находят матрицу $U(a, x) = (\!(u_{ij}(a, x))\!)$, используя основное в методе инвариантной вставки (см. также РЖМат, 1959, 9134) соотношение $U(a, x) = U(a+1, x)\,U(a, a+1)$. Указывается, что тем же путем можно получить математическое ожидание и характеристическую функцию времени до достижения концов интервала. Отмечается, что нахождение матрицы $U(a, x)$ методом инвариантной вставки более удобно в вычислительном отношении, чем обычный метод составления системы линейных уравнений, так как он требует значительно меньшего числа операций при вычислении интересующих величин. С помощью метода инвариантной вставки получены также известные результаты для одномерного случайного блуждания (случай $N = 1$). Намечен подход к применению этого метода в двумерном случае. Р. З. Хасьминский

3 В34. О непрерывности броуновского движения с многомерным параметром. Sirao Tunekiti. On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter. «Nagoya Math. J.», 1960, **16**, Febr., 135—156 (англ.)

Изучаются свойства броуновского движения с многомерным параметром в смысле Леви $X(A, \omega)$ (A — множество в N-мерном евклидовом пространстве). Обозначим через O начало координат, $\mathrm{dis}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B. Пусть $\psi(t)$ — неотрицательная и неубывающая функция, определенная для достаточно больших значений t. Если множество A, удовлетворяющее неравенству $X(A, \omega) \geqslant [\mathrm{dis}(0, A)]^{1/2} \psi[\mathrm{dis}(0, A)]$, ограничено (неограничено) для почти всех ω, то $\psi(t)$ принадлежит верхнему (нижнему) классу относительно $X(A)$ на бесконечности. В этом случае будем писать $\psi(t) \in \mathfrak{U}_N^\infty$ ($\psi(t) \in L_N^\infty$).

Теорема 2. Функция $\psi(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{U}_N^\infty$ или L_N^∞ в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int^\infty \frac{1}{t} \psi^{2N-1}(t)\, e^{-\frac{1}{2}\psi^2(t)}\, dt$.

Эта теорема обобщает на случай любого N теорему, установленную А. Н. Колмогоровым для обычного броуновского движения ($N = 1$). Из теорем автора следует некоторые результаты Леви и других авторов.

Р. З. Хасьминский

3 В35. Одна задача броуновского движения и ее обобщения. Malecot G. Le problème du mouvement brownien et ses généralisations. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1959, 8, № 1, 187—195 (франц.)

Отмечая, что простейшей схемой диффузии является случайное блуждание по решетке, автор предлагает вместо классического случайного блуждания рассматривать более сложный процесс, учитывающий скорость частицы. Именно: в случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, наступающие по закону Пуассона, совершаются «скачки» величины α_i (за промежуток времени Δt скачок величины α_i происходит с вероятностью $\pi_i = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$). В применении к броуновскому движению частицы, автор дает следующее выражение для величины α_i: $\alpha_i = \frac{(1 + l_i) m_i}{m + m_i}(v_i - x)$, где m и x — масса и скорость частицы, m_i и v_i — масса и скорость молекулы, с которой она столкнулась. Сообразуясь с этим, он рассматривает случайный процесс описанного вида с величинами $\alpha_i = p_i[v_i - X(t)]$, где $X(t)$ — скорость частицы, и получает некоторые его характеристики.

Ю. А. Розанов

3 В36. Некоторые предельные теоремы для стохастических процессов. Lamperti John. Some limit theorems for stochastic processes. «J. Math. and Mech.», 1958, **7**, № 3, 433—448 (англ.)

Рассматриваются предельные распределения для некоторых случайных величин, связанных с некоторыми типами стохастических процессов. В частности, рассматривается марковский процесс с постоянными вероятностями перехода. Получены некоторые результаты, относящиеся к теории рекуррентных событий, ряду положительно определенных сумм, суммам устойчивых случайных величин и др. В. П. Скитович

3 В37. Признак однородности по координатам непрерывного процесса Маркова. Черкасов И. Д. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 2, 229—237 (рез. англ.)

Рассматривается марковский процесс $X(t)$ с непрерывным временем и со значениями в n-мерном римановом пространстве V_n. На процесс накладываются условия, при которых семейство инфинитезимальных операторов процесса $X(t)$ (определяемое естественным образом) задается на гладких функциях в некоторой системе координат $\{x^i\}$ формулами

$$A_t = A^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + B^{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j},$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Если существует такая система координат, в которой функции $A^i(t, x)$ равны нулю, а $B^{ij}(t, x)$ не зависят от x, то процесс $X(t)$ называется однородным по координатам. Автор приводит критерий однородности процесса по координатам. М. Г. Шур

3 В38. К определению строгого марковского процесса. Юшкевич А. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 2, 237—243 (рез. англ.)

Е. Б. Дынкин предложил (РЖМат, 1958, 7968) два варианта определения строго марковского неоднородного по времени процесса и показал, что оба варианта эквивалентны в случае непрерывных справа процессов. В реферируемой статье устанавливается эквивалентность этих вариантов в общем случае. М. Г. Шур

3 В39. Собственные корреляционные функции и их применения в теории стационарных марковских процессов. Сарманов О. В. «Докл. АН СССР», 1960, 132, № 4, 769—772

Рассмотрим двумерную плотность вероятностей $p(t, x, y)$ случайных величин $x = x(t_1)$, $y = x(t_1 + t)$,

где $x(t)$ — стационарный действительный процесс. Пусть выполнены условия:

$$1)\ p(t,x,y)=p(t,y,x);\ 2)\ \iint_{\Omega}\frac{p^2(t,x,y)}{p(x)\,p(y)}\,dxdy<\infty,$$

где $t\neq 0$; $\Omega=[a\leqslant x;\ y\leqslant b]$; $p(x)=\int_a^b p(t,x,y)\,dy$.

Теорема 1. Для того чтобы введенная выше функция $p(t,x,y)$ могла быть двумерной плотностью непрерывного стационарного марковского процесса, необходимо и достаточно выполнение условий: а) собственные функции $\{\varphi_k(x)\}$ ядра $p(t,x,y)/\sqrt{p(x)\,p(y)}$ не зависят от t, б) собственные числа $\{r_k(t)\}$ этого ядра имеют вид $r_k(t)=e^{-\lambda_k t}$, $t\geqslant 0$; $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$. Модуль собственного числа $r_1(t)$ имеет следующий смысл: $|r_1(t)|=\sup_f|Mf(x)f(y)|$, где sup берется по функциям, удовлетворяющим условиям $Mf(x)=0$; $Mf^2(x)=1$. При некоторых дополнительных ограничениях, в частности, в предположении, что собственные функции $\{\varphi_k(x)\}$ представляют полную систему полиномов, ортогональных в бесконечном интервале, найдены характеристические функции всех плотностей $p(t,x,y)$, удовлетворяющих теореме 1 и условиям, указанным выше.

Р. Ф. Матвеев

3 В40. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений. Хасьминский Р. З. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, 5, № 2, 196—214 (рез. англ.)

Автор определяет диффузионные процессы в σ-компактных метрических пространствах как процессы, обладающие некоторыми естественными свойствами, присущими обычным диффузионным процессам в n-мерных евклидовых пространствах R_n. Для необрывающихся возвратных диффузионных процессов автор устанавливает существование и единственность (с точностью до мультипликативной постоянной) инвариантной меры. Аналогичный результат содержится также в работе Танака и Маруяма (РЖМат, 1959, 9288). Пусть X — возвратный необрывающийся диффузионный процесс, заданный в области E, $E\subseteq R_n$, и пусть его расширенный инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}$ в смысле Е. Б. Дынкина (РЖМат, 1958, 3926) на достаточно гладких функциях имеет вид:

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

причем функции a_{ij} и b_i трижды дифференцируемы в E, а квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ невырождена в E. Предполагается также, что уравнение $\mathfrak{A}u-u=0$ не имеет ограниченных и положительных в E решений (это требование эквивалентно требованию регулярности процесса по Р. Л. Добрушину). При этих условиях доказывается, что существует и притом единственное решение $u(x,t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu,\ u(x,0)=f(x)$$

в области E (f — непрерывная, ограниченная функция). При исследовании асимптотики $u(x,t)$ при $t\to\infty$ устанавливается, что если для любой ограниченной области G, содержащейся в E вместе со своим замыканием $\overline{G}$: а) существует единственное решение задачи Дирихле $Lu=0$ в $E\setminus\overline{G}$ с заданием граничных условий на границе G, б) уравнение $Lu=-1$ имеет положительное в $E\setminus\overline{G}$ решение, то решение задачи (1) удовлетворяет соотношению: $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\int_E f(x)\,\mu(dx)$, где μ — инвариантная мера процесса X ($\mu(E)=1$). Если же условие а) выполнено, а б) нет, то для любой финитной функции $f(x)$ $\lim_{s\to\infty}s^{-1}\int_0^s u(x,t)\,dt=0$, но если $f(x)\geqslant 0$ и $f(x)\not\equiv 0$, то $\lim_{s\to\infty}\int_0^s u(x,t)dt=+\infty$. Наконец, если условие а) не выполнено, то для любой финитной функции $f(x)\geqslant 0$, $u(x,t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\int_0^\infty u(x,t)\,dt<+\infty$.

М. Г. Шур

3 В41. Предельные свойства в нуле полугруппы Маркова. Chacon Rafael V. Limit properties at zero of the Markov semi-group. «Amer. J. Math.», 1960, 82, № 1, 106—112 (англ.)

Рассматривается в измеримом пространстве (E,B) однородный марковский процесс с непрерывным временем. Его переходная функция $P(t,x,A)$ предполагается непрерывной по t. Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, порожденная множествами вида $\{x:a\leqslant P(t,x,A)<b\}$, где $t>0$, a и b действительны. Оказывается, что для всяких $x\in E$, $G\in\mathfrak{M}$, $u>0$ функция $P(t,y,G)$ сходится по мере $P(u,x,A)$ при $t\to 0$ к характеристической функции множества G. Устанавливаются также некоторые другие свойства мер $P(t,x,A)$.

М. Г. Шур

3 В42. О задаче линейного прогноза для некоторых стохастических процессов. Cramér Harald. On the linear prediction problem. for certain stochastic processes. «Arkiv. mat.», 1960, 4, № 1, 45—53 (англ.)

Рассматривается бесконечная в обе стороны последовательность случайных величин $\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots$ (случайный процесс с дискретным временем); пусть $Mx_k=0$, $M|x_k|^2<\infty$ при всех k. Обозначим через H_k линейное замыкание в среднем квадратичном величин x_j, $j\leqslant k$, и положим

$$\sigma_{np}^2=\min_{c_k}M\Big|x_n-\sum\nolimits_{k>0}c_kx_{n-p-k}\Big|^2.$$

Если $\sigma_{np}\equiv 0$ при всех p и n, то процесс x_n называется нетерминированным. В случае, когда процесс x_n является недетерминированным, существует последовательность ξ_{r_k} некоррелированных между собой величин, $\xi_{r_k}\subset H_{r_k}$, $M\xi_{r_k}=0$, $D\xi_{r_k}=1$ и детерминированный процесс y_k такие, что

$$x_n=\sum\nolimits_{r_k\leqslant n}c_{nr_k}\xi_{r_k}+y_n,\ \sigma_{np}^2=\sum_{n-p<r_k<n}|c_{nr_k}|^2.$$

Далее, целое n называется точкой недетерминированности, если $\sigma_{n1}>0$. Всевозможные точки недетерминированности и образуют последовательность r_k. В работе рассматривается гармонизуемый процесс

$$x_n=\int_0^{2\pi}e^{inu}dz(u),$$

где

$$Mz(u)=0,\ Mz(u)\overline{z}(v)=F(u,v),$$

причем предполагается, что спектральная функция $F(u,v)=\int_0^u\int_0^v f(s,t)\,dudv$ абсолютно непрерывна, а спектральная плотность $f(s,t)$ интегрируема в квадрате и равномерно ограничена в некоторой окрестности диагонали $s=t$ квадрата $0\leqslant u,\ v\leqslant 2\pi$. Доказывается теорема: Чтобы данные числа r_k образовывали полную систему точек недетерминированности, необходимо и достаточно, чтобы спектральная функция $F(u,v)$ допускала представление в виде

$$F(u,v)=\sum\nolimits_{r_k}\varphi_k(u)\,\varphi_k(v)+G(u,v),$$

где $G(u,v)$ есть спектральная функция некоторого детерминированного гармонизуемого процесса, а ряд по r_k сходится абсолютно для всех u, v.

$$\varphi_k(u)=\sum_{n=r_k}^{\infty}a_{nr_k}e^{-inu}+\beta_k u+\gamma_k,$$

причем ряд в правой части сходится также абсолютно и, кроме того, $\sum_{r_k\leqslant n}|a_{nr_k}|^2<\infty$. Ю. А. Розанов

3 В43. Некоторые спектральные свойства взвешенных случайных процессов. Shapiro H. S., Silverman R. A. Some spectral properties of weighted random processes. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, 5, № 3, 123—128 (англ.)

Рассматриваются случайные процессы вида $y(t)=m(t)x(t)$, где $x(t)$ есть стационарный в широком смысле процесс со спектральной плотностью $f(\omega)$, а весовой множитель $m(t)$ является неслучайной функцией, интегрируемой в квадрате. Пусть $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,dX(\omega)$ есть спектральное представление стационарного процесса $x(t)$ и $M(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}m(t)\,dt$. Тогда преобразование Фурье $Y(\omega)$ отдельной траектории процесса $y(t)$, $Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}y(t)\,dt$ можно представить как $Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}M(\omega-\omega')\,dX(\omega')$. Используя это представление, авторы доказывают следующую теорему относительно «спектральной плотности» $\gamma(\omega)=M|Y(\omega)|^2$: Пусть спектральная плотность $f(\omega)$ процесса $x(t)$ монотонно убывает при достаточно больших ω и, кроме того, отношение $f(\omega)/f(\omega')\to 1$ равномерно по ω и ω', если $\omega,\omega'\to\infty$ таким образом, что $\omega/\omega'\to 1$. Пусть далее $\int_{-\infty}^{\infty}|M(\omega)|^2\,d\omega=1$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}|M(\omega)|^2/f(\omega)=0$. Тогда $\lim\limits_{\omega\to\infty}\gamma^{(\omega)}/f(\omega)=1$. Содержатся также некоторые обобщения этой теоремы и несколько примеров.

Ю. А. Розанов

3 В44. Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем. Розанов Ю. А. «Докл. АН СССР», 1959, 125, № 2, 277—280

Рассматривается задача линейной экстраполяции n-мерного стационарного процесса $x(t)=\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ $t=\ldots-1,0,1\ldots,$ ранга 1, т. е. такого процесса, ранг матрицы спектральных плотностей $f(\lambda)=\|f_{lj}(\lambda)\|$ которого равен 1 почти везде. Приведем основные результаты заметки.

Теорема 2. Для регулярности стационарного процесса $x(t)=\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ ранга 1, $x_k(t)\neq 0$ при всех $k=1,\ldots,n$, необходимо и достаточно условие $\int_{-\pi}^{\pi}\log f_{kk}(\lambda)\,d\lambda>-\infty$ и отношение $f_{kj}(\lambda)/f_{jj}(\lambda)$, $k\neq j$, есть граничное значение некоторой функции $\Gamma_{kj}(z)$, $z=\rho e^{-i\lambda}$, класса N_δ, $\delta>0$, при $\rho\to 1$. Здесь N_δ — класс функций $\Gamma(z)$, представимых в виде $\Gamma(z)=\Gamma_1(z)/\Gamma_2(z)$, $\Gamma_l(z)\in H_\delta$.

Регулярный процесс ранга 1 можно представить в виде $x_k(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{km}u(t-m)$, $k=1,\ldots,n$, где $u(t)$ — стационарный процесс с некоррелированными значениями. В теореме 3 приводится представление функции $\Gamma_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{km}z^m$, $k=1,\ldots,n$, через $f(\lambda)$, превращающееся при $x_1(t)=\ldots=x_n(t)$ в хорошо известную формулу Колмогорова

$$\Gamma_k(z)=\sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f_{kk}(\lambda)\,\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\,d\lambda\right\}.$$

Теорема 4. Стационарный процесс $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda t}\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^x(\lambda)\Phi_k(d\lambda)\right],$$

где функции $\varphi_k^x(\lambda)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^x(\lambda)\,\varphi_k^u(\lambda)=\frac{1}{2\pi},\quad \sum_{k,j=1}^{n}\varphi_k^x(\lambda)\,\overline{\varphi_j^x(\lambda)}f_{kj}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}.$$

Здесь $\varphi_k^u(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{km}e^{-i\lambda m}$ — граничное значение функции $\Gamma_k(z)$, а $\Phi_k(d\lambda)$ — случайная спектральная мера процесса $x_k(t)$, $x_k(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda t}\,\Phi_k(d\lambda)$.

И. А. Ибрагимов

3 В45. Применение характеристического функционала и семиинвариантов к эргодической теории стационарных процессов. Леонов В. П. «Докл. АН СССР», 1960, 133, № 3, 523—526

Исследуются различные эргодические свойства действительных стационарных в узком смысле процессов $\xi(t)$ в зависимости от свойств старших спектральных моментов. Рассматриваются такие процессы $\xi(t)$, для которых $M|\xi(t)|^k<\infty$ при всех $k=1,2,\ldots$, а сам процесс $\xi(t)$ однозначно определяется своими моментами $m_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)=M\xi(t_1)\,\xi(t_2)\ldots\xi(t_k)$, при этом линейные функционалы на пространстве G_k обобщенных мер ограниченной вариации вида $\int_{R^k}m_\xi^{(k)}(t_1,\ldots,t_k)\,g_k(dt)$ можно представить в виде $\int_{R^k}z_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\,M_\xi^k(d\lambda)$, где $M_\xi^k(d\lambda)$ есть некоторая комплексная мера ограниченной вариации, а

$$z_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=\int_{R^k}e^{i(\lambda_1t_1+\ldots+\lambda_kt_k)}\,g_k(dt),\quad k=1,2,\ldots$$

Меры $M_\xi^k(d\lambda)$ называются спектральными моментами. С этими спектральными моментами связываются меры $F_\xi^l(d\lambda)$, называемые спектральными семиинвариантами, а именно меры $F_\xi^l(d\lambda)$, входящие в выражение характеристического функционала

$$\chi_\xi(g)=M[\exp(i\int\xi(t)\,g(dt))],$$

$$\log\chi_\xi(g)=\sum_{l=1}^{k}\frac{i^l}{l!}\int_{R_l}z(\lambda_1)\ldots z(\lambda_l)\,F_\xi^{(l)}(d\lambda)+$$
$$+o(\|z\|^{k+1}),\ \|z\|=\sup_\lambda|z(\lambda)|,$$

и связанные с мерами $M_\xi^k(d\lambda)$ обычными формулами, посредством которых связаны моменты и семиинварианты. Отметим, что $F_\xi^{(1)}(d\lambda)$ есть мера массы $m=M\xi(t)$, сосредоточенная в точке $\lambda=0$, а $F_\xi^{(2)}(d\lambda)$ есть обычная спектральная мера процесса $\xi(t)$. Доказываются теоремы:

I. Для того чтобы стационарный процесс $\xi(t)$ был процессом с перемешиванием в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы была равна нулю полная вариация $|F_\xi^k|(L_k^l(\nu))$ мер $F_\xi^k(d\lambda)$ на плоскостях $L_k^l(\nu)=\{\lambda:\lambda_1+\ldots+\lambda_l=\nu\}$ в пространстве R^k, $0<l<k$, $k\geqslant 2$, $-\infty<\nu<\infty$, $|F_\xi^k|(L_k^l(\nu))=0$.

II. Для эргодичности $\xi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\chi_\xi(g_0+V^\tau g_1)\,d\tau=\chi_\xi(g_0)-\chi_\xi(g_1)$ для всех $g_0,g_1\in G_1$ (здесь $V^\tau g_1$ есть сдвиг меры g_1: $V^\tau g_1(dt)=g_1[d(t-\tau)]$).

Формулируются, кроме того, условия перемешивания r-й степени, а также перемешивания всех степеней. Указывается, кроме того, что известное усиление условия перемешивания всех степеней приводит к центральной

предельной теореме для средних по времени процесса $\xi(t)$. Ю. А. Розанов

3 В46. Многомерная задача прогнозирования. Rosenblatt M. The multidimensional prediction problem. «Statist. methods radio wave propag.». London — Oxford — New York — Paris, 1960, 99—111 (англ.)

Излагается ряд известных результатов по экстраполяции многомерных стационарных случайных процессов. Основным из них является теорема Засухина (как для случая дискретного, так и для непрерывного времени) и формула для детерминанта матрицы ошибок при прогнозе на один шаг вперед в случае дискретного времени. Следует отметить, что автор нигде не упоминает того факта, что основная теорема его работы получена советским математиком Засухиным (Докл. АН СССР, 1941, **33**, 435—437). Ю. Н. Розанов

3 В47. Последовательные времена возвращений в стационарных процессах. Chen Moy Shu-Teh. Successive recurrence times in a stationary process. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1254—1257 (англ.)

С последовательностью стационарных (в узком смысле) случайных величин $X_0, X_1, X_2, \ldots$ и событием $\{X_0 \in B\}$, $P\{X_0 \in B\} > 0$, заданными на пространстве Ω, состоящем из всех последовательностей $\omega = \{\ldots x_{-1} x_0 x_1 \ldots\}$ $(X_n(\omega) = x_n)$, связывается последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots$ случайных величин (времен возвращения в B), определенных на Ω следующим образом, если для некоторого ω существует бесконечно много положительных целых чисел n таких, что $x_n \in B$, то обозначим через ν_1, $\nu_1+\nu_2$, $\nu_1+\nu_2+\nu_3 \ldots$ последовательные натуральные числа, для которых $x_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k} \in B$; если существует лишь конечное число таких n, скажем k, то определим $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ как прежде, и положим $\nu_{k+1} = \nu_{k+2} = \ldots = \infty$. Для $\nu_1, \nu_2, \ldots$ устанавливается целый ряд свойств, в частности $\lim_{k\to\infty} (\nu_1(\omega) + \ldots + \nu_k(\omega))/k = \nu(\omega)$, где $\nu(\omega)$ может быть как конечной, так и бесконечной, кроме того, определяя меру на Ω как $P_E(F) = P(E \cap F)/P(E)$, автор получает, что при таком задании меры $\nu_1, \nu_2, \ldots$ является стационарной последовательностью, и $\int \nu_k(\omega) P_E(d\omega) = \int \nu(\omega) P_E(d\omega)$ при любом k; $\nu_k(\omega)$ интегрируема относительно P_E тогда и только тогда, когда $\nu(\omega)$ интегрируема относительно P_E.

Б. А. Рогозин

3 В48. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса. Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 2, 222—227 (рез. англ.)

Рассмотрим стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$ и обозначим $H_{-\infty}^{t}$ и $H_{t}^{+\infty}$ гильбертовы пространства, порожденные (соответственно) случайными величинами $\xi(u)$, $u \leqslant t$ и $\xi(v)$, $v \geqslant t$. Через $\rho(s)$ обозначим верхнюю грань коэффициента корреляции между случайными величинами ξ и η, когда $\xi \in H_{-\infty}^{t}$, $\eta \in H_{t+s}^{+\infty}$. Если процесс $\xi(t)$ имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию $F(\lambda)$ и $f(\lambda) = F'(\lambda)$, то $\rho(s) = \inf_{\varphi} \operatorname{vrai\,sup}_{\lambda} [\Phi(\lambda, s) f^{-1}(\lambda)]$, где в случае целочисленного времени $\Phi(\lambda, s) = |f(\lambda) - e^{i\lambda s} \varphi(e^{-i\lambda})|$ и $\inf_{\varphi}$ берется по функциям $\varphi(z)$, аналитически продолжаемых внутрь единичного круга, а в случае непрерывного времени $\Phi(\lambda, s) = |f(\lambda) - e^{i\lambda s} \varphi(\lambda)|$ и $\inf_{\varphi}$ берется по функциям $\varphi(z)$, аналитически продолжаемым в нижнюю полуплоскость. Показано, что процесс $\xi(t)$ обладает сильным перемешиванием в смысле Розенблатта (РЖМат, 1959, 1746) тогда и только тогда, когда $\lim_{s\to\infty} \rho(s) = 0$. В частности, в случае непрерывного времени сильное перемешивание имеет место, если $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна, а $f(\lambda) > 0$ равномерно непрерывна на всей прямой и существуют такие постоянные m, M и целое k, что при достаточно больших λ $m \leqslant f(\lambda) \lambda^{-k} \leqslant M$.

М. Г. Шур

3 В49. Некоторые теоремы сходимости для стационарных процессов. Kawata T. Some convergence theorems for stationary stochastic processes. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1192—1214 (англ.)

В части I устанавливаются аналоги некоторых теорем сходимости, известных из общей теории преобразования Фурье, для процессов вида $x(t) = f(t) + E(t)$, где $E(t)$, $-\infty < t < \infty$, — стационарный в широком смысле процесс с $M\{E(t)\} = 0$ и $f(t)$ — числовая функция. В частности, если $\frac{f(S)}{1+|S|} \in L_1(-\infty, \infty)$, $k(s) \in L_1(-\infty, \infty)$, $k(s) = o(|s|^{-1})$, когда $|s| \to \infty$ и $k(s)$ ограничена, тогда $1.\,i.\,m.\, n \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s) k(ns)\, ds = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} k(s) ds$. При усилении ограничений на $f(t)$, $k(s)$ и процесс $E(t)$ получена оценка скорости сближения правой части с левой. В предположении, что $k(x)$ является абсолютно непрерывной в каждом конечном интервале, $|x^2 k(x)| \leqslant H$, $k(x) \in L_1(-\infty, \infty)$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|\, dt \leqslant G$$

и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt$$

существует для некоторого ξ, где G и H — постоянные, устанавливается формула Винера для $x(t)$

$$1.\,i.\,m._{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\xi t}\, ak(at)\, dt =$$

$$= 1.\,i.\,m._{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-i\xi t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt.$$

Часть II посвящена исследованию поведения выражения $I(T) = \frac{1}{4\pi T} \left| \int_{-T}^{T} E(t)\, e^{-ixt}\, dt \right|^2$ при $T \to \infty$, для процессов, в некотором смысле близких к гауссовским процессам. При этих условиях показывается, что если спектральная плотность процесса $p(x)$ ограничена и непрерывна в точке $x = \xi$, то

$$\lim_{T'>T\to\infty} \left\{ M\{|I(T) - I(T')|^2\} - \left(1 - \frac{T}{T'}\right) 2p^2(\xi) \right\} = 0,$$

если $\xi \neq 0$ и

$$\lim_{T'>T\to\infty} \left\{ M\{|I(T) - I(T')|^2\} - \left(1 - \frac{T}{T'}\right) 4p^2(0) \right\} = 0.$$

Эта теорема показывает, что $I(T)$ не сходится в среднем квадратичном, — факт, обсуждавшийся многими авторами. Б. А. Рогозин

3 В50. Стационарные процессы и теория прогнозирования. Furstenberg Harry. Stationary processes and prediction theory. «Ann. Math. Studies», 1960, № 44, 283 pp. (англ.)

3 В51. Построение оптимального в смысле Шеннона кода в простейшем случае бинарного канала с шумами. Флейшман Б. С. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып. 3, 59—95

До последнего времени было доказано лишь существование кодов, оптимальных в смысле Шеннона, т. е. позволяющих при наличии шумов с вероятностью правильного декодирования $P_n \to 1$ $(n \to \infty)$ передавать $M \leqslant 2^{nc}$ n-членных цепочек, где c — пропускная способность канала. В статье впервые приводится конструктивное построение оптимального в смысле Шеннона кода (для случая бинарного симметричного канала с нулевой памятью). Рассматривается канал связи, преобразующий входные сигналы 0,1 независимо друг от друга с вероят-

ностью q в такие же выходные сигналы 0,1 и с вероятностью $p=1-q$ в противоположные выходные сигналы 1,0. При этом для каждой n-членной цепочки входных сигналов $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и каждого множества E цепочек выходных сигналов $y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ $(\alpha_i, \beta_i, =0, 1)$ определена условная вероятность $P_x(E)=P(y\in E \mid x)$. Вводятся следующие два понятия: 1) множество E выходных цепочек представляет (не представляет) входную цепочку x, если $P_x(E)\to 1\ (0)$ $n\to\infty$; 2) входные цепочки $x_1,\ldots,x_M$ называются различными, если существуют такие представляющие их множества $E_1,\ldots,E_M$, что каждое пересечение $E_i \mid (\bigcup_{j\neq i} E_j)$ не представляет соответствующей цепочки x_i. Разбиение всей совокупности возможных выходных цепочек на множества $E_1,\ldots,E_M$, представляющие M различимых входных цепочек $x_1,\ldots,x_M$, называется кодом. При заданном коде при появлении выходной цепочки $y\in E_i$ можно утверждать, что на входе имелась цепочка x_i, причем это утверждение будет справедливым с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$. Код, содержащий максимально возможное число различимых входных цепочек, назван Шенноном оптимальным. Известно, что для каналов рассматриваемого типа это максимальное число не превосходит $2^{n[1-h(p)]}$, где $h(p)=-\log_2[p^p(1-p)^{1-p}]$. В работе конструируется асимптотически оптимальный код, в котором в качестве множества, представляющего каждую входную цепочку x, избирается множество всех выходных цепочек y, у которых число символов $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, отличающихся от соответствующих символов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ входной цепочки x, не превосходит $[n(p+\varepsilon)]$, где квадратные скобки означают целую часть числа, а ε — некоторое малое число. Доказывается, что различимые входные цепочки при таком коде можно получить, выбрав случайно $M=2^{n[1-2h(p+\varepsilon)-h(p-\varepsilon)]}$ цепочек и затем удалив из выбранных цепочек некоторую их часть. Доказывается, что число различимых входных цепочек в предлагаемом коде удовлетворяет неравенству $N\geqslant M(1-2^{-n\gamma})$ с вероятностью большей, чем вероятность правильного декодирования. Следовательно, обеспечив достаточно большую вероятность правильного декодирования, мы с еще большей вероятностью имеем асимптотически близкий к оптимальному код. Показывается, что при сравнительно больших $p\leqslant 0{,}5$ различимые входные цепочки можно получить просто случайным выбором, без удаления части выбранных цепочек. При очень малых $p=\lambda/n$ для конструкции асимптотически оптимального кода предлагается целесообразное видоизменение. В работе используется развитый автором комбинаторный аппарат (РЖМат, 1958, 7934). Основные результаты работы без подробных доказательств опубликованы ранее (РЖМат, 1959, 7203).

Примечание референта. Реферат Р. Добрушина на указанную выше статью (РЖМат, 1959, 7203) не отражает существа работы и не содержит указания на ее основной результат — конструктивное построение асимптотически оптимального кода. А. С. Монин

3 В52. О некотором применении усиленного закона больших чисел для вывода закона распределения из вероятностных соображений. Cantelli Francesco Paolo. Su qualche applicazione della legge uniforme dei grandi numeri per la deduzione delle leggi di frequenza da considerazioni di probabilità. «Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna», 1957, 41—48 (итал.)

3 В53. Случайные величины с точки зрения общей теории переменных. Menger Karl. Random variables from the point of view of a general theory of variables. «Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statictics and Probability». Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 215—229 (англ.)

3В54 К. Конечные марковские цепи. Kemeny John George, Snell J. Laurie. Finite Markov chains. Princeton, N. J.—London, D. Van Nostrand Co., 1960, viii, 210 pp., ill., 37 sh. 6d. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 534, 14 (англ.)

3 В55 К. Современная теория вероятности и ее приложения. Parzen Emanuel. Modern probability theory and its applications. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1960, xv, 464 pp., ill., 86 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 550, 11 (англ.)

3 В56 К. Сборник задач по теории вероятностей. Вып. I. Лозинский С. Н., Котова А. И. Одесск. кредитно-экон. ин-т, Одесса, 1960, 63 стр., 2 р.

3 В57 Д. О некоторых предельных теоремах теории вероятностей. Маслов К. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1960

3 В58 Д. Приближение сумм независимых одинаково распределенных случайных величин неограниченно-делимыми законами. Мешалкин Л. Д. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1960

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3 В59. Таблицы некоторых критериев значимости для распределения Пуассона при малых выборках и таблицы сопряженности признаков 2×3. Chakravarti I. M., Rao C. Radhakrishna. Tables for some small sample tests of significance for Poisson distributions and 2×3 contingency tables. «Sankhya, Indian J. Statist.», 1959, **21**, № 3-4, 315—326 (англ.)

Построены таблицы критических значений при уровне значимости $\alpha\leqslant 0{,}05$ для дисперсионного критерия и критерия максимума правдоподобия при проверке однородности в случаях выборки из совокупности, распределенной по закону Пуассона, и из биномиальной совокупности, когда имеются три независимые выборки одинакового объема. Для распределения Пуассона приводятся также таблицы для критерия согласия χ^2 и для критерия максимального правдоподобия. В работе имеются примеры применения таблиц. Б. Н. Гарттейн

3 В60. Сравнение критериев для среднего логарифмически-нормального распределения с известной дисперсией. Olds Edwin G., Severo Norman C. A comparison of tests on the mean of a logarithmico-normal distribution with known variance. WADC Tech. Note 55-249. Wright Air Devel. Center, Wright—Patterson Air Force Base, Ohio, 1955, vi+58 pp. (англ.)

Работа посвящена применению логарифмического преобразования к задачам испытания гипотез о среднем логарифмически нормальной (л. н.) величины с известной дисперсией. Экспериментатор может не увидеть необходимости в преобразовании и непосредственно применить теорию нормального распределения к оригинальным данным, или же он надлежаще преобразует данные и затем применяет нормальную теорию для испытания гипотез о параметрах на преобразованной шкале. Каждая из этих процедур подробно исследуется, строится третья процедура, использующая лемму Неймана—Пирсона (проверка простых гипотез). Сравнение этих процедур производится на основе соответствующих оперативных характеристик. Выведены некоторые асимптотические свойства. Оказывается, что три процедуры дают совершенно разные результаты, если только среднее при нулевой гипотезе не велико по отношению к стандартному отклонению. Из введения автора.

3 В61. Расширение вальдовского метода выравнивания прямой линией сложной регрессии. Hooper J. W., Theil H. The extension of Wald's method of fitting straight lines to multiple regression, «Rev. Inst. internat. statist.», 1958, **26**, № 1-3, 37—47 (англ.; рез. франц.)

Вальд (Wald A., Ann. Math. Statistics, 1940, **11**, № 3, 284—300) предложил простой метод оценки коэффициента регрессии в корреляции двух переменных. Этот метод

был обобщен на случай сложной регрессии (РЖМат, 1959, 9317). В статье дается другое обобщение вальдовского метода и производится сравнение с первым обобщением. Р. Х. Дивеев

3 В62. Критерии линейности регрессии в случае коррелированных наблюдений. Bennett B. M. Tests for linearity of regression involving correlated observations, «Ann. Inst. Statist. Math.», 1957, 8, № 3, 193—195 (англ.)

Рассматривается модификация обычного критерия линейности регрессии применительно к случаю коррелированных наблюдений. Библ. 4 назв.

Л. Я. Савельев

3 В63. Математика простой корреляции. Smith C. D. On the mathematics of simple correlation. «Math. Mag.», 1958, 32, № 2, 57—69 (англ.)

Популярная статья, обсуждающая простейшие понятия теории линейной корреляции (коэффициент корреляции, корреляционное отношение и т.д.).

Ю. И. Максимов

3 В64. Z-критерий и симметрично распределенные случайные величины. David F. N. The Z-test and symmetrically distributed random variables. «Biometrika», 1959, 46, № 1-2, 123—129 (англ.)

Выводится разложение Фишера-Корниша для процентных точек Z-критерия в предположении, что результаты наблюдений независимы и подчиняются одинаковому симметричному распределению. Указана формула для поправок к процентным точкам Z-критерия, вычисленным для выборок из нормальной совокупности. Результаты применяются для целей дисперсионного анализа при односторонней классификации; даны формулы семиинвариантов для сумм внутри и между классами.

Л. Н. Большев

3 В65. Эксперименты с двумя способами обработки каждой экспериментальной единицы при наличии индивидуальной изменчивости. Cox C. P. Experiments with two treatments per experimental unit in the presence of an individual covariate. «Biometrics», 1958, 14, № 4, 499—512 (англ.)

Рассматривается экспериментальный план, позволяющий сравнивать эффективность двух способов обработки в том случае, когда эта эффективность меняется с течением времени. Указана соответствующая процедура дисперсионного анализа. Л. Н. Большев

3 В66. Нисходящая процедура в многомерном анализе. Roy J. Step-down procedure in multivariate analysis, «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 4, 1177—1187 (англ.)

Пусть результаты наблюдений представляют собой взаимно независимые одномерные нормально распределенные случайные величины с постоянной (неизвестной) дисперсией и математическими ожиданиями, являющимися линейными формами от неизвестных параметров, и пусть требуется построить совместную доверительную область для некоторых (известных) линейных функций от этих форм. Как хорошо известно, в качестве такой области можно выбрать некоторый эллипсоид, а соответствующий коэффициент доверия вычислить с помощью распределения дисперсионного отношения (см., например, РЖМат, 1955, 3316; 1958, 6989). В более общем случае, когда результаты наблюдений представляют собой взаимно независимые многомерные нормальные случайные величины с постоянной (неизвестной) ковариационно-дисперсионной матрицей, автор предлагает строить совместную доверительную область для неизвестных параметров с помощью так называемой «нисходящей» процедуры (step-down). Эта процедура основана на последовательном построении эллипсоидов, о которых говорилось выше; при этом каждый раз используется лишь какая-либо одна компонента многомерных наблюдений. Доказано, что соответствующие статистики независимы и подчиняются распределению дисперсионного отношения. В заключительной части работы нисходящая процедура используется для сравнения двух ковариационно-дисперсионных матриц по результатам наблюдений. Указано, что ранее эта процедура была использована для проверки независимости многомерных нормальных случайных величин (см. Roy S. N., Bergmann R. E., North. Carolina Inst. Statist. Mimeograph Ser., 1957, № 175). Л. Н. Большев

3 В67. О точных вероятностях в критерии Реньи. Ishii Goro. On the exact probabilities of Rényi's tests. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, 11, № 1, 17—24 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Референт (РЖМат, 1955, 3314) определил распределение

$$\alpha_n(b) = \sup_{F(x<b)} (F_n(x) - F(x))/(1-F(x)),$$

и

$$\beta_n(b) = \sup_{F(x)<b} (F(x) - F_n(x))/(1 - F(x))$$

для $n \to +\infty$. Даются явные формулы при конечных значениях n для функции распределения величин $\alpha_n(b)$ и $\beta_n(b)$. Автор замечает, что результаты работы могут быть применены в испытаниях на долговечность.

Примечание референта. На странице 20 в формулах B), C) и D) вместо (Fx) следует читать $F(x)$.

A. Rényi

3 В68. Обобщение D_n^+ статистики. Dempster A. P. Generalized D_n^+ statistics, «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 2, 593—597 (англ.)

Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения независимых наблюдений, равномерно распределенных в интервале (0, 1). Указана простая формула для распределения

$$p(n, \delta, \varepsilon) = P\left\{F_n(x) \leqslant \delta + \frac{1-\delta}{1-\varepsilon} x \text{ для } 0 < x < 1\right\},$$

которая аналогична формуле, дающей распределение статистики Смирнова $D_n^+ = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} [F_n(x) - x]$ (Н. В. Смирнов, Успехи матем. наук, 1944, 10, 179—206). При этом $p(n, \varepsilon, \varepsilon) = P\{D_n^+ \leqslant \varepsilon\}$. В. С. Королюк

3 В69. Асимптотические разложения для критерия Смирнова и для размаха накопленных сумм. Kemperman J. H. B. Asymptotic expansions for the Smirnov test and for the range of cumulative sums, «Ann. Math. Statistics», 1959, 30, № 2, 448—462 (англ.)

Рассматривается простейшее одномерное случайное блуждание с независимыми скачками ζ_k, принимающими значения ± 1 с вероятностью 1/2. Во многих приложениях важное значение имеет условная вероятность $p_n(i, j, c) = P\{z_n = i;\ 0 < z_m < c,\ 1 \leqslant m \leqslant n \mid z_0 = j\}$ для последовательности сумм $z_m = \sum_{k=0}^{m} \zeta_k$ ($\zeta_0 = z_0$; i, j, c — целые положительные числа). Из точной формулы для вероятности $p_n(i, j, c)$:

$$p_n(i, j, c) = \frac{4}{c} \sum_{k=1}^{\left[\frac{c-1}{2}\right]} \sin\frac{k\pi i}{c} \sin\frac{k\pi j}{c} \left(\cos\frac{k\pi}{c}\right)^n$$

в работе получено асимптотическое разложение по степеням n^{-1} до порядка $n^{-m-\frac{1}{2}}$ (m — любое целое число), действующее равномерно по i ($0 < i < c$), j ($0 \leqslant j \leqslant c$) и $c > 0$. Результат сформулирован в теореме 1. В качестве приложения из теоремы 1 получено асимптотическое разложение для распределения максимальных уклонений между двумя эмпирическими функциями распределения $F_n^{(1)}(x)$ и $F_n^{(2)}(x)$ (n — объем каждой выборки)

$$P_n(a,b)=P\left\{-\frac{a}{n}<F_n^{(1)}(x)-F_n^{(2)}(x)<\frac{b}{n},\ -\infty<x<+\infty\right\}$$

(a, b — положительные целые числа или $+\infty$.) Нетрудно показать (см. Гнеденко Б. В., Королюк В. С., Докл АН СССР, 1951, **80**, 525—528), что $2^{-2n}C_{2n}^{n}P_n(a,b)=p_{2n}(a,a,a+b)$. Построена также асимптотика распределения размаха $R_n=U_n+V_n$ сумм z_n, где $U_n=-\min\limits_{0\leqslant m\leqslant n} z_n$, $V_n=\max\limits_{0\leqslant m\leqslant n} z_m$. Распределение размаха R_n также выражается через $p_n(i,j,c)$. В. С. Королюк

3 В70. Предельное совместное распределение максимального и минимального выборочных промежутков. Weiss Lionel. The limiting joint distribution of the largest and smallest sample spacings, «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 2, 590—593 (англ.)

Пусть $Y_1\leqslant Y_2\leqslant\ldots\leqslant Y_n$ — вариационный ряд случайной величины ξ, имеющей плотность распределения $f(x)=a_j$ для $x\in[z_{j-1},z_j)$, где $0=z_0<z_1<\ldots<z_{H-1}<z_H=1$. Предполагается, что $a_j>0$ для $j=1,2,\ldots,H$. Пусть далее $M=\min a_j$, $B=\sum_{j:a_j=M}(z_j-z_{j-1})$, $S=\int_0^1 f^2(x)\,dx$, $w_1=Y_1$, $w_l=Y_l-Y_{l-1}(l=2,3,\ldots,n)$, $w_{n+1}=1-Y_n$, $U_n=\min(w_1,\ldots,w_{n+1})$, $V_n=\max(w_1,\ldots,w_{n+1})$. Показано, что

$$\lim P\left[U_n>\frac{U}{(n+1)^2},\ V_n<\frac{\log(n+1)+\log M-\log V}{M(n+1)}\right]=\exp\{-(SU+BV)\}$$

для любых положительных U и V. Для проверки гипотезы о равномерности начального распределения предлагаются критерии, основанные на U_n и V_n. Показано, что асимптотическое критическое значение для U_n при уровне значимости α будет $-\log(1-\alpha)/(n+1)^2$ и асимптотическая мощность критерия U_n равна $1-(1-\alpha)^s$. Критерий U_n не является состоятельным, критерий V_n состоятелен. Б. Н. Гартштейн

3 В71. О классификации индивидуума в одну из двух групп, не зависящей от распределения. Hudimoto Hirosi. On the distribution-free classification of an individual into one of two groups, «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, **8**, № 2, 105—112 (англ.)

Имеются две одномерные совокупности π_i с плотностями f_i и функциями распределения F_i, $i=1,2$, которые предполагаются неизвестными; совокупность π представляет смесь π_1 и π_2, для произвольного элемента которой вероятность принадлежать π_1 (π_2) равна p (q). Из π производится выборка O_N объема N с исследованием принадлежности каждого ее элемента к π_1 или π_2. По результатам O_N требуется выбрать число x с тем, чтобы последующие индивидуумы классифицировать по тому, превосходит ли отвечающий им признак число x или нет. Вероятность правильной классификации

$$C(x)=pF_1(x)+q[1-F_2(x)]. \qquad (1)$$

Для $C(x)$ строится оценка $\hat{C}_N^{(1)}(x)$, составленная по типу (1) с заменой $F_i(x)$ на эмпирические функции распределения, а p и q — на частоты появления π_1 и π_2 в выборке O_N. Для максимума $C(x)$ имеет место оценка: $C_N^{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_j\left|\frac{m}{N}f_j^{(1)}-\frac{N-m}{N}f_j^{(2)}\right|$, где $f_j^{(i)}$ — частота попадания элементов O_N, принадлежащих π_i, в j-й из наперед выбранных интервалов, m — число элементов из π_1, попавших в выборку O_N. На основании $\hat{C}_N^{(1)}(x)$ и $C_N^{(2)}$ можно оценить x_0, обращающее $C(x)$ в максимум. Если p и q ограничены снизу положительными числами то представляется возможным построить для x_0 доверительный интервал. Приводятся примеры, взятые из техники. В конце статьи отмечается связь $C(x_0)$ с расстоянием в смысле Мацусита (РЖМат, 1959, 657).

И. Н. Коваленко

3 В72. Некоторые совместные распределения и совместные предельные распределения в теории упорядоченных статистик. II. Vincze István. On some joint distributions and joint limiting distributions in the theory of order statistics. II, «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1959, **4**, № 1, 29—47 (англ.; рез. венг., русск.)

Часть I. РЖМат, 1959, 6088. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ и $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ — две выборки независимых наблюдений над случайной величиной с непрерывным распределением и пусть $\zeta_1\leqslant\zeta_2\leqslant\ldots\leqslant\zeta_{2n}$ — вариационный ряд этих наблюдений. Рассматриваются случайные величины

$$D_{n,n}^{+}=\max_{-\infty<x<+\infty}[F_n(x)-G_n(x)];\quad D_{n,n}=\max_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-G_n(x)|;$$

$$R_{n,n}^{+}=\frac{1}{2}[F_n(\zeta_{\nu+}+0)+G_n(\zeta_{\nu+}+0)];$$

$$R_{n,n}=\frac{1}{2}[F_n(\zeta_{\nu}+0)+G_n(\zeta_{\nu}+0)],$$

где $F_n(x)$ и $G_n(x)$ — выборочные функции распределения, $\zeta_{\nu+}$, ζ_{ν} — первые выборочные значения в вариационном ряду, для которых $D_{n,n}^{+}=F_n(\zeta_{\nu+}+0)-G_n(\zeta_{\nu+}+0)$ соответственно $D_{n,n}=|F_n(\zeta_{\nu}+0)-G_n(\zeta_{\nu}+0)|$. В предыдущей заметке автора (РЖМат, 1960, 5626) получены совместные распределения для пар $(D_{n,n}^{+},R_{n,n}^{+})$ и $(D_{n,n},R_{n,n})$, а также предельные распределения для них. В реферируемой работе определяется производящая функция совместного распределения

$$P_{r,k}^{(n)}=P\{D_{n,n}^{+}=k/n;\ R_{n,n}^{+}=r/n\}.$$

Наличие производящей функции для $P_{r,k}^{(n)}$ позволяет получить некоторые дополнительные результаты, например выражение для условного математического ожидания

$$M\{2nR_{n,n}^{+}\mid D_{n,n}^{+}=k/n\}=k(2n+1)/(2k+1)\ 2n\cdot(k=1,2,\ldots).$$

В. С. Королюк

3 В73. О предельных теоремах Колмогорова и Смирнова для разрывных функций распределения. Schmid Paul. On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous distribution functions, «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 1011—1027 (англ.)

Предельные теоремы А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова о распределении максимальных уклонений между эмпирической и теоретической функциями распределения обобщаются на случай функций распределения, содержащих дискретную компоненту с конечным числом скачков. Предельные распределения в этом случае зависят от параметров дискретной компоненты. В указанных предположениях получены также предельные распределения максимальных уклонений отношения разности между эмпирической и теоретической функциями распределения к теоретической функции распределения (теоремы Реньи). Для доказательства сформулированных теорем I—IV использованы с некоторыми изменениями методы, которые применялись для доказательства аналогичных теорем в предположении непрерывности функции распределения. В. С. Королюк

3 В74. Критерий, основанный на интервалах между максимумами. Meigniez R. Le test des intervalles

intermaximaux. «Rev. statist. appl.», 1959, 7, № 2, 87—95 (франц.)

Предлагается критерий для проверки гипотезы о том, что порядок, в котором расположены числа в некоторой числовой последовательности, является случайным. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — последовательность не равных между собой чисел. Расположим эти числа в цикличес-ком порядке так, что за v_n следует v_1 и т. д. Число v_q, для которого $v_{q-1} < v_q > v_{q+1}$, называется максимумом; группа чисел, расположенных между двумя соседними максимумами, называется интервалом, а количество этих чисел — длиной интервала. Обозначим через N число всех интервалов, через N_i — число интервалов длины i и через P_i — вероятность интервала длины i (при этом предполагается, что порядок, в котором стоят $v_1, \ldots, v_n$, является случайным, причем все порядки равновероятны). В работе выводятся формулы для вычисления вероятностей P_i, которые оказываются практически независящими от n. Определим случайную величину $K^{(2)}$

$$K^{(2)} = \sum_{i=1} (NP_i - N_i)^2/NP_i.$$

Приводится полученная по 100 выборочным значениям $K^{(2)}$ эмпирическая функция распределения $K^{(2)}$, которая хорошо совпадает с распределением χ^2 (с соответствующим числом степеней свободы), вследствие чего автор предлагает использовать величину $K^{(2)}$ для проверки гипотезы о том, что порядок чисел является случайным. Приводится численный пример. Отмечается, что аналогичный критерий можно получить, если с самого начала рассматривать вместо максимумов минимумы.

М. И. Фортус

3 В75. О критерии Эренберга для проблемы *m* ранжировок. Elteren Ph. van. Over Ehrenberg's toets voor het probleem van *m* rangschikkingen. «Rapp. Math. centrum», 1957, № ZW-018, 1—11 (голл.)

Указывается, что критерий Терпстра (РЖМат, 1959, 2965; используем обозначения этого реферата) был раньше опубликован Эренбергом (Ehrenberg A. S. C., Biometrika, 1952, **39**, 82—87). Показано, что результаты упомянутой статьи упрощаются в случае, если все $z_{ij}^{(\alpha)} = \pm 1$, например $X = (n+1)X_1 + X_2$. Из анализа критерия Эренберга и критерия Фридмана (использующего статистику $\sum_i \left(\sum_j \sum_\alpha z_{ij}^{(\alpha)}/\sqrt{m}\right)^2$ делается вывод, что мощность обоих почти равна, но проще вычисляется статистика Фридмана.

Г. К. Энгелис

3 В76. Вероятностное понятие о коэффициентах регрессии при линейном выравнивании временных рядов. Theil H., Mennes L. B. M. Conception stochastique de coefficients multiplicateurs dans l'ajustement linéaire des séries temporelles (Multiplicative randomness in timeséries régression analysis). «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1959, 8, № 3, 211—227 (франц.)

Пусть наблюдается случайный процесс $y_t = b_t x_t + u_t$, $t = 1, \ldots, T$, где x_t — известные числа, а случайные величины b_t и u_t независимы между собой и нормально распределены с параметрами, соответственно (β, σ_0^2), $(0, \sigma_1^2)$. Предлагается следующий метод оценки параметров β, σ_0^2 и σ_1^2. Пусть b — обычная оценка наименьших квадратов величины β. Представим величину $v_t^2 = (y_t - bx_t)^2$ в виде $v_t^2 = \sigma_0^2 P_t + \sigma_1^2 Q_t + w_t$, где P_t и Q_t зависят только от x_t, а w_t — случайный процесс с нулевым средним и дисперсией $2(\sigma_0^2 P_t + \sigma_1^2 Q_t)^2$. Применим к v_t^2 метод «наименьших взвешенных квадратов», т. е. найдем величины $s_0'^2$ и $s_1'^2$, обращающие в минимум сумму $\sum_{t=1}^T (v_t^2 - s_0'^2 P_t - s_1'^2 Q_t)^2/2(\sigma_0^2 P_t + \sigma_1^2 Q_t)^2$. Полученные оценки $s_0'^2$ и $s_1'^2$ имеют меньшие дисперсии, чем s_0^2 и s_1^2. Наконец, представив y_t в виде $y_t = \beta x_t + u_t^*$, где u_t^* независимы и нормально распределены $(0, \sigma_0^2 + \sigma_1^2 x_t^2)$, и снова, применяя метод «наименьших взвешенных квадратов» (т. е. минимизируем сумму

$$\sum_{t=1}^T (y_t - b' x_t)^2/(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 x_t^2),$$

где $\sigma_0^2 + \sigma_1^2 x_t^2$ — дисперсия u_t^*), получаем для β оценку b' с меньшей дисперсией, чем b. Предложенный метод применяется к изучению зависимости между стоимостями экспорта и импорта.

М. И. Фортус

3 В77. Эффективная оценка параметров в схеме скользящих средних. Durbin J. Efficient estimation of parameters in moving average models. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 306—316 (англ.)

Рассматривается стационарный процесс x_t, удовлетворяющий соотношению

$$x_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где ε_t независимы и нормально распределены $(0, \sigma)$, а β — неизвестный параметр, $|\beta| < 1$. Работа посвящена нахождению асимптотически эффективных оценок β и построению связанных со схемой (1) критериев значимости и согласия. Из (1) следует, что

$$\varepsilon_t = x_t + \sum_{i=1}^\infty a_i x_{t-i},$$

где коэффициенты a_i однозначно определяются величиной β. Пусть a_i — оценки коэффициентов α_i, полученные методом наименьших квадратов. Искомая оценка β, равная

$$b = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{i+1}/\sum_{i=0}^k a_i^2, \qquad (2)$$

получается, как решение уравнения правдоподобия, построенного для величин a_i. При этом используется тот факт, что a_i асимптотически (при $n \to \infty$) имеют нормальное распределение с параметрами, зависящими от β. Число k в соотношении (2) может быть выбрано как угодно большим, в зависимости от требуемой точности. Вместо оценок a_i можно брать оценки, вычисляемые по выборочным коэффициентам корреляции, которые также асимптотически нормальны. В отличие от оценки, являющейся решением уравнения правдоподобия, построенного по величинам x_t, оценка (2) вычисляется довольно просто. Оценка b для достаточно больших k практически является несмещенной; показано, что она асимптотически эффективна при $n \to \infty$. Аналогичные оценки параметров β_k, $k = 1, \ldots, h$, предлагаются для более общего случая, когда

$$x_t = \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_h\varepsilon_{t-h}.$$

Отмечается, что полученные результаты остаются в силе и если не требовать, чтобы ε_t были нормально распределены. Строится критерий для проверки гипотезы о том, что $\beta = \beta_0$, а также критерий для проверки гипотезы о том, что величины x_t удовлетворяют схеме (1). Приводятся численные примеры.

М. И. Фортус

3 В78. Об оценке параметров сигнала. Glaser E. M., Park J. H., Jr. On signal parameter estimation, «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, **4**, № 4, 173—174 (англ.)

На отрезке $(0, T)$ заданы случайный процесс $\xi(t)$, случайный гауссовский процесс $\zeta(t)$ с равномерной спектральной плотностью N и их сумма $\eta(t) = \xi(t) + \zeta(t)$. Предполагается, что функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и, следовательно, $\zeta(t)$ на интервале $(0, T)$ могут быть разложены в ряд

по ортогональным функциям $\varphi_j(t)$ $(j=1,\ldots,n,\ldots)$. Пусть компоненты векторов $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots)$ и $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n,\ldots)$ будут коэффициентами разложений соответственно $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$. Строятся наилучшие байесовские оценки $\gamma(\eta)$ для вектора ξ на основе знания η. Рассмотрены две весовые функции: $c_1(\xi,\gamma)=\|\xi-\gamma\|^2$, $c_2(\xi,\gamma)=A-\delta(\xi-\gamma)$, где A — некоторая заданная постоянная, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Приводятся общие выражения для наилучших оценок k-й компоненты $\gamma_k(\eta)$ вектора $\gamma(\eta)$. Рассмотрен частный случай независимых компонент вектора ξ. При этом получена следующая оценка (по обоим критериям) для гауссовских с параметрами (μ_k, σ_k) компонент ξ_k $(k=1,2,\ldots)$

$$\gamma_k(\eta)=(Y_k\sigma_k^2+\mu_k N)/(\sigma_k^2+N),$$

где Y_k — значения η_k. Для квадратической весовой функции в случае, когда компоненты вектора ξ независимы и $M\zeta=0$, получено $\gamma_k(\eta)=Y_k$. Та же оценка имеет место при втором критерии и при условии независимости компонент ξ. Рассмотренные задачи имеют применение в вопросах обнаружения радиосигнала на фоне шума.

Б. С. Цыбаков

3 В79. Асимптотически эффективные состоятельные оценки спектральной плотности стационарного временного ряда. Parzen Emanuel. On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 2, 303—322 (англ.)

Статья является продолжением предыдущих работ автора (РЖМат, 1959, 625, 4061). Рассматривается семейство оценок вида

$$f_T^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-iv\omega}\,k_T(v)\,R_T(v)\,dv$$

для спектральной плотности $f(\omega)$ стационарного процесса, наблюдаемого на отрезке $[0,T]$, где $R_T(v)$ — выборочная корреляционная функция процесса, $k_T(v)$ — ковариационное ядро, выбираемое таким образом, чтобы для оценки удовлетворялся некоторый критерий оптимальности. Такое представление допускает ряд предложенных ранее оценок спектральной плотности. Вводятся понятия состоятельности различного порядка, эффективности и асимптотической эффективности. Показывается, что наивысший порядок состоятельности семейства оценок спектральной плотности стационарного процесса с интегрируемой корреляционной функцией $R(v)$ определяется поведением $R(v)$ при больших v. Разбираются случаи, когда $R(v)\to 0$ экспоненциально и алгебраически. В свете полученных результатов сравниваются некоторые из предложенных ранее оценок для $f(\omega)$.

А. П. Хусу

3 В80. Оценивание спектральной плотности после исключения тренда. Hannan E. J. The estimation of the spectral density after trend removal, «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 2, 323—333 (англ.)

Вычислено смещение в оценке спектральной плотности $f(\theta)$ стационарного процесса $\varepsilon(t)$ в уравнении регрессии $y(t)=\sum\beta_i x_i(t)+\varepsilon(t)$, когда β_i оценены методом наименьших квадратов. Предполагается, что $x_i(t)$ удовлетворяют условиям, введенным Гренандером в одной из его работ (РЖМат, 1956, 8978). Получено также выражение для смещения в оценках серийных коэффициентов корреляции.

А. П. Хусу

3 В81. Оценка для вероятностей обратного перехода в простой однородной цепи Маркова конечного порядка. Firescu D. Funcţii de estimaţie pentru probabilităţile de trecere inverse ale unui lanţ Markov, simplu, omogen, de ordin finit, «An. Univ. «C. I. Parhon.» Ser. ştiinţ. natur.», 1959, № 21, 15—23 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть n_i — число раз пребывания в состоянии a_i $(i=1,2,\ldots,m)$; n_{ij} — число появления последовательности a_ia_j в n реализациях цепи. Если уравнение $|p_{ij}-\lambda\delta_i|=0$ имеет только один корень по модулю равный 1 (т. е. $\lambda=1$), то $\frac{n_{i_1j_1}}{n_{i_1}}$, $\frac{n_{i_2j_2}}{n_{i_2}}$, $\ldots$, $\frac{n_{i_rj_r}}{n_{i_r}}$ $(r\leqslant m)$ являются несмещенными, асимптотически нормальными оценками для вероятностей обратного перехода $q_{j_1i_1}$, $q_{j_2i_2},\ldots,q_{j_ri_r}$ семейства стационарных марковских цепей, определенных матрицей $\|p_{ij}\|$. Оценки асимптотически эффективны только в случае $r=m$.

O. Onicescu

3 В82. Оценки для вероятностей перехода цепи Маркова. Firescu D. Funcţii de estimaţie pentru probabilităţile de trecere ale unui lanţ Markov, «An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur.», 1958, № 20, 37—47 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассмотрим вектор $V_s^n=\left(n_{i_1j_1},n_{i_2j_2},\ldots,n_{i_rj_r}\right)$, $r\leqslant m$, где n_{ij} — число появления последовательности a_ia_j в n реализациях цепи $(i,j=1,\ldots,m)$ при гипотезе $P\{x_1=a_h\}=p_{sh}$. Матрица вероятностей перехода цепи $\|p_{ij}\|$ $i,j=1,\ldots,m$, неразложима. Вероятностное распределение случайного вектора $W_s^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(V_s^n-M\left(V_s^n\right)\right)$ стремится при $n\to\infty$ к r-мерному нормальному закону. Подобный же результат имеет место для вектора $\begin{pmatrix}n_{i_1j_1},&n_{i_2j_2},&\ldots,&n_{i_rj_r}\\ n_{i_1},&n_{i_2},&&n_{i_r}\end{pmatrix}$. Оценки для $p_{i_1j_1},\ldots p_{i_rj_r}$, представляемые этим вектором, являются асимптотически эффективными только в случае $r=m$.

O. Onicescu

3 В83. О сравнении различных реализаций цепи Маркова. Darwin J. H. Note on the comparison of several realizations of a Markoff chain, «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 412—419 (англ.)

Рассматривается простая однородная цепь Маркова $\{X(t),\ t=t_1,\ t_2,\ldots,t_n,\ldots;\ t_{k+1}-t_k=\tau\}$ с s состояниями и матрицей переходных вероятностей $T=\|p_{jk}\|$, $p_{jk}=P\{X(t_l)=k\mid X(t_l-\tau)=j\}$ и строятся асимптотические критерии для сравнения различных параметров этой цепи, полученных по r различным длинным реализациям. Эти критерии следующие: а) критерий для гипотезы, что r множеств вероятностей перехода $\{p_{jk,l}\}$, $l=1,\ldots,r$, совпадают, имеющий асимптотически распределение χ^2 с $s(r-1)(s-1)$ степенями свободы; б) два отдельных критерия для сравнения вероятностей перехода по r различным реализациям в случае малого τ: один для сравнения $p_{jj,l}$, имеющий распределение χ^2 с $s(r-1)$ степенями свободы, другой для сравнения $v_{jk,l}$ (условная вероятность перехода из j в k, взятая при условии, что цепь покинула состояние j), распределенный как χ^2 с $s(r-1)(s-2)$ степенями свободы; в) критерий для гипотезы совпадения r наборов абсолютных вероятностей $p_j=P\{X(t_l)=j\}$, имеющий распределение χ^2 с $(r-1)(s-1)$ степенями свободы, причем этот критерий выводится в предположении, что все характеристические корни матрицы T различны и что лишь один имеет модуль, равный единице. Статистики полученных критериев выводятся из отношения правдоподобия и имеют довольно сложную структуру, поэтому мы их опустим. Рассмотрены примеры применения этих критериев для изучения процесса воспитания детей в школе.

В. М. Волков

3 В84. О некоторых статистических критериях для цепей Маркова m-го порядка. Goodman Leo A. On some statistical tests for mth order Markov chains. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 154—164 (англ.)

Дается обзор известных ранее критериев для проверки гипотезы $H(P_1)$ о том, что рассматриваемые случайные величины связаны в простую цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей P_1. Так как распределение ис-

пользуемых при этом статистик зависит от матрицы P_1, то эти критерии нельзя применять в таких задачах, как, например, проверка гипотезы H_s о том, что рассматриваемая цепь Маркова — сложная порядка s, и др. В связи с этим вводится ряд других статистик, с помощью которых можно решать задачи о проверке нулевой гипотезы H_t при конкурирующей гипотезе H_{s-1} при $s \geqslant t+1$. При условии, что выполнена гипотеза H_t (на основании того, что введенные статистики при неограниченном увеличении объема выборки асимптотически эквивалентны соответствующим статистикам, полученным методом максимума правдоподобия) вычисляются асимптотические распределения этих статистик. Аналогично решается задача проверки гипотезы $H(P_t)$ о том, что рассматриваемая цепь Маркова — сложная порядка t с матрицей переходных вероятностей P_t. М. И. Фортус

3 В85. Последовательный процесс для статистических выводов, связанный с аддитивным семейством достаточных статистик. Kitagawa Tosio. Successive process of statistical inference associated with an additive family of sufficient statistics, «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 26—36 (англ.; рез. франц.)

Если семейство независимых достаточных статистик $\{u_j\}$, $j = 1, 2\ldots$, для параметра τ с плотностью $p_j(u_j; \tau)\, d\mu(u_j) = \exp\{-\tau u_j + b_j(\tau) + a_j(u_j)\}\, d\mu(u_j)$ таково, что выполнены условия: 1) $\exp a_{m+n}(u) = \int \exp[a_m(u-v) + a_n(v)]\, d\mu(v)$, 2) $b_m(\tau) = m \cdot b_1(\tau)$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$, то в этом случае сумма $g = u_m + u_n$ является достаточной статистикой с плотностью

$$\exp\{-\tau g + (m+n)\, b(\tau) + a_{m+n}(g)\}\, d\mu(g).$$

Семейство независимых достаточных статистик, для которых выполнены условия 1) и 2), автор называет аддитивным семейством независимых достаточных статистик. Введение этого понятия дает возможность найти дополнительные подходы к изучению последовательных процессов, рассматриваемых автором в мемуарах (РЖМат, 1956, 3993 и 3994). Подчеркивается важность этого понятия для более глубокого понимания некоторых вопросов статистической теории Фишера (РЖМат, 1959, 2950). Показывается, что метод последовательного анализа Вальда может быть приложен к более общему классу функций распределения. Выводится свойство, присущее любому аддитивному семейству независимых достаточных статистик, которое, по мнению автора, может служить отправным пунктом для получения новых результатов. Ю. И. Медведев

3 В86. Упрощенное доказательство одной формулы, используемой для доказательства закона Колмогорова—Смирнова. Dugué Daniel. Sur une démonstration simplifiée d'une formule utile pour la loi de Kolmogoroff—Smirnoff, «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 9—11 (франц.; рез. англ.)

Основываясь на формуле Фурье, автор доказывает тождество

$$1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} e^{-2k^2x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2\pi^2/8x^2},$$

которому удовлетворяет закон распределения Колмогорова. Н. В. Смирнов

3 В87. О распределении наибольшего из шести корней матрицы в многомерном анализе. Pillai K. C. Sreedharan, Bantegui Celia G. On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 237—240 (англ.)

3 В88. Проверка гипотез с классической точки зрения. Giardina Basilio. La verifica delle ipotesi dal punto di vista classico, «Boll. Centro ricerca operat. Ser. metodol.», 1959, **3**, № 3, 36—44 (итал.)

3 В89. Заметка о аппроксимации распределения нецентрального χ^2. Pearson E. S. Note on an approximation to the distribution of non-central χ^2, «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 364 (англ.)

3 В90. Определение параметров в системе распределений Джонсона. Leslie D. C. M. Determination of parameters in the Johnson system of probability distributions. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 229—231 (англ.)

3 В91. Теория порядковых статистик. Rényi Alfréd. On the theory of order statistics, «Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954», Amsterdam. Vol. 1. Groningen—Amsterdam, 1957, 508—509 (англ.)

3 В92. Заметки о мерах рассеянности в статистике. Quiceno H. Gerardo. Nociones sobre las medidas de dispersión en estadística, «Cenicafé», 1959, **10**, № 5, 143—157 (исп.)

3 В93. Оценка линейных и нелинейных структурных соотношений. Barton D. E., Mallows C. L. Estimation of linear and non-linear structural relations, «Nature (Engl.)», 1959, **184**, № 4692, Suppl. № 14, 1086 (англ.)

3 В94. О различии статистической методологии Фишера и Неймана. Исида, Уэмацу, Сакино. «Токэи сури кэнкюсе ихо», «Proc. Inst. Statist. Math.», 1959, **7**, № 1, 23—42 (японск.; рез. англ.)

3 В95. Теоремы о доверительных областях. Court L. M. Theorems on confidence regions. «Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954», Amsterdam. Vol. 1. Groningen—Amsterdam, 1957, 504—506 (англ.)

3 В96. Краткая заметка о методе Рао построения перфорированных карт для факториальных планов. Masuyama Motosaburo. Short note on C. R. Rao's method of constructing punched cards for factorial designs, «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan, Scientists and Engrs», 1958, **5**, № 2, 69—70 (англ.)

3 В97. Каноническая форма критерия χ^2 и план эксперимента. Dumas M. Maurice. Forme canonique du critère χ^2 et plan d'expérience, «J. Soc. statist. Paris», 1960, **101**, № 4-6, 112—115 (франц.)

3 В98. Волшебный латинский квадрат. Приёмы анализа дисперсии. Dagnelie P. Le carré latin magique: technique d'analyse de la variance, «Rev. agric. (Belg.)», 1959, **12**, № 3, 233—242 (франц.; рез. англ.)

3 В99. Влияние подготовительного F-критерия на сравнение средних эффектов двух обработок в дисперсионном анализе. Сиотаки. «Токэй сури кэнкюсё ихо», «Proc. Inst. Statist. Math.», 1953, **1**, № 1, 3—12 (японск.; рез. англ.)

3 В100. Критерии симметрии Уилкоксона при наличии связей. Smid L. J. Receptuur de symmetrietoets van Wilcoxon, indien «gelijken» optreden, «Statist. neerl.», 1959, **13**, № 4, 463—464 (гол.)

3 В101. Мера распределения и индексы распределения. Adam A. Verteilungsmaße und Verteilungsindizes. «Metrika», 1959, **2**, № 3, 239—244 (нем.; рез. англ.)

3 В102. О тренде в теории статистического анализа стохастических процессов. Акаике. «Токэй сури кэнкюсе ихо», «Proc. Inst. Statist. Math.», 1959, **7**, № 1, 65—80 (японск.; рез. англ.)

3 В103. Некоторые задачи об оценке спектра временного ряда. Гренандер Улф, Розенблатт Мюррей (Grenander U., Rosenblatt M.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1958, **2**, № 5, 105—122 Перевод с английского см. РЖМат, 1958, 5970.

3 В104К. Быстрые процедуры статистических расчетов: набор легких непараметрических методов оценки и проверки гипотез. Quenouille Maurice Henry. Rapid statistical calculations: a collection of distribution—free and aesy methods of estimation and testing. London, Griffin, 1959 (1960), 96 pp., ill., 10 sh., «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 528, 10 (англ.)

3 В105 К. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. Kac Mark. Statistical independence in probability, analysis and number theory. «Math. Assoc. America», 1959, xiv, S. l., 93 pp (англ.)

3 В106 К. Вероятность и статистика: книга, посвященная Гаральду Крамеру. Ed. Grenander Ulf. Probability and statictics: the Harald Cramér volume. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons, London, Chapman and Hall, 1959, 434 pp., ill., £5), «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 537, 9 (англ.)

3 В107 К. Анализ данных, выравниваемых прямой. Acton Forman S. Analysis of straight-line data. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1959, xiii, 267 pp., ill., 72 sh., «Brit. Nat. Bibliogr.», 1959, № 499, 12 (англ.)

3 В108 К. Проверка статистических гипотез. Lehmann Erich Leo. Testing statistical hypotheses. New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1959, xiii, 369 pp., ill., 88 sh., «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 523, 11 (англ.)

3 В109 К. Методы корреляции и анализ регрессии, линейной и криволинейной. 3-е изд. Ezekiel Mordecai, Fox Karl August. Methods of correlation and regression analysis, Linear and curvilinear. 3rd ed. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1959, xv, 548 pp., ill., 88 sh., «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 532, 8 (англ.)

3 В110 К. Исчисление вероятностей и статистический анализ. Основные понятия. Ballieu Robert. Calcul des probabilités et analyse statistique. Elements. 2-e éd. Louvain, Libr. univ., 1959, 240 p., 175 Bfr. «Bibliogr. Belg.», 1960, **86**, № 6, 142 (франц.)

3 В111 К. Введение в теорию вероятностей и статистику. Lindgren Bernard William, McElrath G. W. Introduction to probability and statistics. New York—London, Macmillan Co., 1959, xv, 277 pp., ill., 44 sh., «Brit Nat. Bibliogr.», 1959, № 512, 9 (англ.)

3 В112 К. Математическая статистика. Deltheil Robert, Huron Roger. Statistique mathématique. Paris, A. Colin, 1959, 208 p., ill., 4,50 NFr. «Bibliogr. France», 1960, **149**, № 9, 293 (франц.)

3 В113 Д. Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения. Филиппова А. А.— Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1960

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

3 В114. Скорость передачи информации с точки зрения индуктивной вероятности. Schwartz L. S., Harris B., Hauptschein A. Information rate from the viewpoint of inductive probability, «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 102—111 (англ.)

Вводится понятие индуктивной вероятности: эта функция, являясь вероятностной мерой, согласуется с теми выводами о возможности события, которые делаются по индукции. Простейшая функция этого типа $P(e)=\frac{(n_e+\omega_e)}{(n+\omega)}$ — индуктивная вероятность события e. Здесь n_e — число появлений события e в цепочке из n событий; ω_e и ω — логическое и общее расстояния Карнапа (РЖМат, 1954, 4096). Приводятся решения некоторых задач теории информации с использованием индуктивной вероятности, в частности решение системы обратной связи для нахождения уровней нулевого решения по полученному сообщению. Приведены графики, которые поясняют идею индуктивной вероятности и ее применения. К. А. Горькова

3 В115. О применении количественной оценки надежности работы устройств автоматических систем. Майоров А. В. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 3, 181—182

Рассматривается вопрос об определении технического ресурса устройств или времени, по истечении которого требуется ремонт или замена устройства. Надежность устройства в интервале $(0,t)$ определяется выражением $P(t)=\exp\left(-\int_0^t \Lambda(t)dt\right)$, где $\Lambda(t)$ — интенсивность появления неисправности. График $\Lambda(t)$ строится по статистическим кривым Λ_t появления неисправностей на отдельных разрядах интервала $(0,t)$. Из графика $P(t)$, если задать предельно допустимое для данных условий работы значение надежности P_0, определяется технический ресурс t_0. Т. И. Товстуха

3 В116. Устойчивость цепей с параметрами, случайно изменяющимися во времени. Bertram J. E., Sarachik P. E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters, «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 260—270 (англ.)

Рассматривается система, описываемая векторным уравнением $\dot{x}=f(x,a(t),(t)$ — случайно меняющиеся во времени параметры. $f(0,a(t),t)=0, \bar{x}(t)=0$ — равновесное решение. Исследуется его устойчивость (в стохастическом смысле). Изучаются только те типы устойчивости, которые связаны с понятием сходимости в среднем (здесь не рассматривается сходимость по вероятности или сходимость с вероятностью 1). Определяются понятия устойчивости в среднем, асимптотической устойчивости в среднем и глобальной устойчивости в среднем. Формулируются по аналогии с работой Ляпунова достаточные условия устойчивости этих трех типов. Полученные результаты пригодны как для линейных, так и для нелинейных систем. Однако только в некоторых частных случаях удается легко построить функцию Ляпунова. Даны примеры. Библ. 10 назв. Т. И. Товстуха

3 В117. Влияние автоматизации на проблематику статистики. Koller Siegfried. Der Einfluß der Automatisierung auf die Aufgabenstellung der Statistik. «Allgem. statist. Arch.», 1959, **43**, № 4, 363—368 (нем.)

Обсуждаются вопросы влияния процессов автоматизации на методы постановки статистических задач, методы их решения и т. д. Автор отмечает, что автоматизация приведет к расширению проблематики статистики, позволит извлечь дополнительную информацию из статистических данных, точнее ставить задачи и лучше использовать статистический материал. Л. Д. Фельдман

3 В118. Расчет упругих систем при наличии стационарных случайных воздействий. Эстрин М. И., В сб. «Исслед. по вопр. теории пластичности и прочности строит. конструкций». М., 1958, 155—172

Несколько задач об определении среднего квадратичного значения напряжений и перемещений определенных конструкций решаются с помощью методов теории случайных функций. Нагрузка $f(t)$, действующая на систему, предполагается стационарным случайным процессом, корреляционная функция которого $R_f(\tau)$, а следовательно, и спектральная плотность $S_f(\omega)$ (преобразование Фурье для $R(\tau)$) известны в результате обработки измерений. Искомое среднее квадратическое значение $\overline{x^2(t)}$ выражается через спектральную плотность $S_y(\omega)$ процесса, представляющего из себя реакцию $y(t)$ линейной системы на внешнее воздействие $f(t)$. В свою очередь $S_y(\omega)=|\Phi(i\omega)|^2 S_f(\omega)$, где $\Phi(i\omega)$ — преобразование Фурье для реакции системы на единичный импульс. Своей задачей автор поставил вычислить $\Phi(i\omega)$ и затем $\overline{x^2(t)}$. Рассмотрены следующие случаи: 1) для одноосного напряжения тела, когда нагрузка может быть представлена в виде произведения функции от координат на функцию времени, а последняя представляет из себя случайный стационарный процесс; 2) вычисление температурных напряжений в полубесконечном массиве, когда внешняя температура — случайная стационарная функция времени; 3) поведение систем с сосредоточенными массами при воздействии случайных нагрузок; 4) динамический расчет балок и плит под воздействием случайных стационарных нагрузок. Ю. А. Веретенников

3 В119. Применение математической статистики в химии. Bielecka Danuta. Zastosowanie statystyki matematycznej w chemii, «Kosmos (Polska)», 1959, **B5**, № 3, 207—224 (польск.)

Очерк применений основных идей математической статистики (в особенности дисперсионного анализа) в химии.

R. Bartoszyński

3 В120. Применение критерия Колмогорова — Смирнова в промышленной практике. Wilde E. de. La aplicación de las pruebas de Kolmogorov—Smirnov en la práctica industrial. «Dyna», 1960, **35**, № 2, 122—129 (исп.)

3 В121. Статистическая теория определения цели пульсирующим радаром. Marcum J. I. A statistical theory of target detection by pulsed radar, «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 2, 59—267 (англ.)

3 В122. Одно применение логарифмически нормального закона. Leveau M. Une utilisation de la loi log-normale, «Rev. statist. appl.», 1957, **5**, № 3, 111—120 (франц.)

Рассматривая будущий курс акций горнорудных компаний, автор предлагает следующую математическую модель. Пусть u_t — средний курс меди в год t. Из данных за 70 лет вытекает, что $\log(u_{t+1}/u_t)$ имеет приблизительно нормальное распределение с малой дисперсией σ^2. Пусть T обозначает последний год, в котором известен курс меди, p — число лет, потребных для пуска рудника в действие, $i+1$ — число лет эксплуатации. Средний курс меди во время эксплуатации есть случайная величина $s/(i+1)$, где $s=\sum_{j=0}^{i} u_{T+p+j}$. Автор находит первый и второй моменты s, затем доказывает, что распределение $\log s$ приблизительно нормально. Доказательство опирается на то, что для малых σ^2 пирсоновский коэффициент асимметрии приблизительно равен 0, а коэффициент эксцесса 3 (по мнению референта, эта часть рассуждений необоснованна, так как существует много распределений с такими характеристиками). Отсюда можно легко построить доверительные пределы для будущего курса меди. Автор еще замечает, что его теоретические результаты подтверждаются экспериментом типа Монте-Карло, проведенным на электронной счетной машине.

J. Oderfeld

3 В123. План выборочного контроля с байесовской оценкой. Taguti Gen-iti. Sampling inspection plan by Baye's estimate, «Repts Electr. Commun. Lab.», 1958, **6**, № 10, 401—413 (англ.)

Исходя из материальных потерь, связанных с контролем, делается попытка обосновать критерий для продолжения инспекции или ее прекращения. Для этой цели автором составлены несложные таблицы. Приводится численный пример.

А. М. Бендерский

3 В124. Проблема исчисления значимостей в торговых исследованиях. Heyn W. Probleme der Signifikanzberechnung in der Martforschung «Unternehmensforschung», 1959, **3**, № 3, 130—136 (нем.; рез. англ.)

Перечисляются некоторые задачи, возникающие при выборе уровня значимости в случае, когда проверяется гипотеза о значениях нескольких связанных между собой параметров. Никаких утверждений работа не содержит.

Б. Н. Гарттштейн

3 В125. Влияние гипергеометрического распределения вероятностей на построение выборочного плана контроля малыми выборками. Rokhsar A. E., Kane G. E. The effect of hypergeometric probability distribution on the design of sempling plans for small lot sizes, «J. Industr. Engng», 1959, **10**, № 6, 467—469 (англ.)

3 В126. Статистические исследования для испытания прочности бетона. Dobrev B., Reissig G. Statistische Untersuchungen zur Prüfung der Betonfestigkeit. «Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin», 1959, **1**, № 12, 717—723 (нем.)

Предлагается методика статистического установления нижнего предела прочности бетона, отвечающего данному уровню надежности как при нормальном, так и при некоторых асимметрических распределениях.

Н. В. Смирнов

3 В127. Минимаксный подход к однократному выборочному контролю по качественному признаку. Ura Shoji. Minimax approach to a single sampling inspection by attributes. «Repts Statist. Applic. Res. Union Japan Scientists and Engrs», 1955, **3**, № 4, 140—148 (англ.)

Следуя Маригути (РЖМат, 1961, 1 В168), автор, на основе принципа минимакса для ущерба, определяет оптимальные значения критического числа дефектных в выборке и объем ее (пользуясь пуассоновским приближением).

Н. В. Смирнов

3 В128. Некоторые статистические методы, имеющие перспективу быть примененными в исследованиях распространения радиоволн. Hoffman W. C. Some statistical methods of potential value in radio wave propagation investigations, «Statist. methods radia wave propag». London—Oxford—New York—Paris, 1960, 117—135 (англ.)

3 В129. Статистические методы в изучении распространения радиоволны. Ed. Hoffman W. C. Statistical Methods in Radio Wave Propagation. Proc. Sympos., Los Angeles, June 18th—20th, 1958., London—Oxford—New York—Paris, Pergamon Press, 1960, xiii, 334 p., ill., 90 sh. (англ.)

3 В130. Отклик линейной системы на негауссовский случайных вход. Crandall Stephen H., Siebert William H., Hoquetis Bernard P. The response of linear systems to non—Gaussian random inputs. «J. Aero/Space Sci.», 1960, **27**, № 2, 154—155 (англ.)

Обсуждается результат, полученный Мазельским (Mazelsky B., J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 3, 145—153): Если стационарный случайный процесс воздействует на линейную систему с узкой спектральной характеристикой, то при некоторых условиях, наложенных на входной процесс, плотность распределения выходного процесса приближается к гауссовской при стремлении к нулю отношения ширины спектральной характеристики системы к ширине спектральной плотности входного процесса. Авторы строят примеры, которые, по их мнению, опровергают этот результат. В качестве первого примера разбирается прохождение суммы синусоиды и гауссовского стационарного процесса через контур с весьма малым затуханием. Утверждается, что если частота синусоиды совпадает с собственной частотой контура, то процесс на выходе не будет асимптотически стремиться к гауссовскому. Второй пример представляет собой случайный процесс с равномерной спектральной плотностью, сосредоточенной в конечной полосе частот, состоящий из суммы двух случайных процессов: негауссовского со спектральной плотностью в полосе $[\Omega_1, \Omega_2]$ и гауссовского, спектральная плотность которого сосредоточена вне интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$. Утверждается без должного доказательства, что при прохождении такого процесса через идеальный полосовой фильтр, пропускающий только частоты, лежащие в интервале $[\Omega_1, \Omega_2]$, выходной процесс не будет гауссовским при любом значении Ω_1, Ω_2. Библ. 6 назв. Примечание референта. Приведенные примеры не опровергают исходного результата, так как в первом примере процессы на входе и выходе будут нестационарными гауссовскими случайными процессами, а во втором примере не доказана «негауссовость» выходного процесса.

В. П. Яковлев

3 В131. Оценка средней скорости телеграфирования при прерывной радиосвязи с частотной манипуляцией. Мельников В. С. «Радиотехника», 1959, **14**, № 4, 20—28

Пусть одна гипотеза состоит в том, что если принят сигнал $Z(t)$, считается посланным сигнал $A(t)$, и пусть альтернативная гипотеза — принятый сигнал $Z(t)$ об-

условлен посылкой $B(t)$. Пусть известны $P(A)$ и $P(B)$ — априорные вероятности сигналов $A(t)$ и $B(t)$, а также $p_A(z)$ и $p_B(z)$ — плотности распределения сигнала $Z(t)$ на выходе канала при условиях, что были посланы сигналы $A(t)$ и $B(t)$ соответственно. Предполагается вести передачу по каналу связи лишь тогда, когда либо $\alpha P(A)\,p_A(z) > P(B)\,p_B(z)$, либо $\beta P(B)\,p_B(z) > P(A)p_A(z)$, где α и β — числа, меньшие единицы. Такая передача называется автором прерывной. Указывается, что примером такой передачи может быть радиосвязь за счет метеорной ионизации. В работе рассматривается случай, когда при частотной манипуляции по каналу связи передаются сигналы

$$A(t) = U_a \sin(\omega_a t + \varphi_a), \quad B(t) = U_b \sin(\omega_b t + \varphi_b) \quad (1)$$

длительностью τ. Здесь U_i, ω_i и φ_i $(i = a, b)$ — фиксированные амплитуда, частота и фаза сигналов $A(t)$ и $B(t)$. В канале действуют аддитивные гауссовские шумы и происходят замирания, в результате которых полезная составляющая сигналов на выходе каналов имеет вид $A(t)$ или $B(t)$, определенных (1), где, однако, U_a и U_b, φ_a и φ_b будут случайными величинами. При этом предполагается, что U_a и U_b имеют релеевское распределение, а φ_a и φ_b равномерно распределены на интервале $(0, 2\pi)$. Отыскиваются вероятность ошибки $P_0 = P_0(\alpha, \beta, \tau)$, вероятность перерыва связи $P_{\text{П}} = P_{\text{П}}(\alpha, \beta, \tau)$ и средняя скорость передачи $n = \frac{1}{\tau}(1 - P_{\text{П}})$. Устанавливается соотношение $f(\alpha, \beta) = 0$ между α и β, исходя из получения минимальной вероятности $P_{\text{П}}$ при заданной P_0, а также вычисляется при этих α и β и заданной P_0 величина τ, при которой скорость n максимальна.

Б. С. Цыбаков

3 В132. Помехоустойчивость приемников импульсных сигналов с амплитудным детектором. Тепляков И. М. «Электросвязь», 1960, № 1, 23—31

Приводится сравнение помехоустойчивости идеального приемника (линейный фильтр плюс синхронный детектор) с приемником импульсных сигналов с линейным и квадратичным детекторами и при синхронном накоплении импульсов. Рассматривается влияние расширения полосы УПЧ по сравнению с оптимальной на помехоустойчивость приемника. Показывается, что использование импульсов с тональной модуляцией позволяет получить помехоустойчивость, близкую к максимальной. Полученные результаты иллюстрируются графиками. Е. М. Сухарев

3 В133. Обнаружение импульсных пакетов случайной продолжительности устройствами с конечной емкостью памяти при воздействии флуктуационных помех. Башаринов А. Е. «Радиотехн. и электроника», 1960, 5, № 3, 355—359

Задача обнаружения сигналов, имеющих форму пакета импульсов с неопределенным моментом появления и случайной продолжительностью для систем с конечной памятью, в данной работе решается на основании критерия «k из m», когда обнаружение считается состоявшимся при не менее чем k превышений порога в m последовательных выборках. Приводятся соотношения для расчета нарастающей (кумулятивной) вероятности обнаружения сигнала, условия нормировки средней частоты ложных срабатываний и зависимость величины пороговых уровней при различных критериях обработки. На основании полученных соотношений подсчитывается кумулятивная вероятность обнаружения для случаев постоянной интенсивности и релеевских флуктуационных сигналов при использовании критериев «1 из n», «2 из 2» и «2 из 3», которые приводятся в виде графиков. Е. М. Сухарев

3 В134. О помехоустойчивости разностнодискретного метода передачи информации. Байковский В. М., «Автоматика и телемеханика», 1960, 21, № 3, 344—358 (рез. англ.)

Рассматривается помехоустойчивость разностно-дискретной модуляции (РДМ) и проводится сравнение ее с импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ) и дельта-модуляцией (ДМ) для случаев заданной средней мощности передатчика и заданной пиковой мощности импульса. В качестве критерия оценки помехозащищенности дискретных систем передачи информации приняты математическое ожидание ошибки и дисперсия ошибки. Получено точное выражение вероятности искажения при РДМ в случае синхронной передачи разнополярными импульсами. Это выражение используется для приближенной оценки в ряде других случаев. Библ. 8 назв.

Е. М. Сухарев

3 В135. Преобразование ограничителем флуктуаций, подчиняющихся релеевскому закону распределения. Морозов В. А. «Радиотехн. и электроника», 1960, 5, № 3, 376—384

Рассматривается воздействие флуктуационного напряжения, подчиняющегося релеевскому распределению вероятностей, на ограничитель, осуществляющий функциональное преобразование $u = f(E)$, где функция $f(E)$ определяется следующим образом:

$$u = f(E) = \begin{cases} u_1 & (0 < E < E_1), \\ S(E - E_1) + u_1 & (E_1 \leqslant E \leqslant E_2), \\ u_2 & (E > E_2). \end{cases}$$

Получены расчетные формулы для среднего значения напряжения на выходе ограничителя и его дисперсии. С помощью представления релеевского двумерного закона распределения в виде ряда по степеням параметра p получена точная формула для спектральной плотности на выходе ограничителя. Показано, что для членов разложения ряда $n = 7$ приближенная формула спектральной плотности дает ошибку не более $5 \cdot 10^{-2}$ в широком диапазоне частот. Все полученные формулы иллюстрируются графиками. Е. М. Сухарев

3 В136. Обнаружение движущихся радиолокационных целей в шумах отражения. Zetterberg Lars-Henning. Detection of moving radar targets in clutter, «Inform. and Control», 1958, 1, № 4, 314—333 (англ.)

Предлагается использовать для обнаружения быстро движущихся целей при наличии мешающих отраженных сигналов от медленнодвижущихся местных предметов различие в их скоростях. Проводится элементарный подсчет выигрыша при применении соответствующих устройств на основе естественных предположений о характеристиках местных предметов, обнаруживаемых целей и применяемых радиолокаторов. Библ. 8 назв.

В. П. Яковлев

3 В137. Разделение сигнала и шума с помощью вероятностных фильтров. Still William L. Separate signal from noise with probability filters, «Control Engng», 1960, 7, № 3, 147—151 (англ.)

Автор замечает, что линейная фильтрация основана на различии спектров сигнала и шума. Для фильтрации негауссовских процессов предлагается нелинейный фильтр, использующий различие в функциях распределения сигнала и шума. Рассмотрен пример, когда используются только одномерные функции распределения. Разбирается схема фильтра, которую можно использовать в системе самонаведения ракеты. В статье не содержится четкой постановки задач и строгих доказательств высказанных предположений. В. П. Яковлев

3 В138. Обнаружение сигнала с неизвестной частотой и произвольной начальной фазой на фоне белого шума. Черняк Ю. Б. «Радиотехн. и электроника», 1960, 5, № 3, 366—375

Рассматривается приемник, предназначенный для обнаружения сигналов прямоугольной формы с неизвестной частотой несущей и произвольной начальной фазой на фоне белого шума. Приемник состоит из набора

фильтров, частотные характеристики которых пересекаются и охватывают заданный интервал частот. Выходы фильтров детектируются и объединяются. Даются рекомендации по выбору типа и числа фильтров, их относительном расположении и о способе объединения выходов для вынесения решения о наличии сигнала. Аналитические результаты иллюстрируются графиками. Библ. 11 назв. Е. М. Сухарев

3 В139. Статистические методы определения динамических характеристик промышленных объектов при наличии шумов и анализ инфранизкочастотных случайных процессов. Леонов Ю. П., Липатов Л. Н. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 2, 180—190 (рез. англ.)

Описан прибор, позволяющий над функциями $x(t)$ и $y(t)$ производить операцию $\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt$. Показана возможность применения этого прибора для анализа случайных процессов и исследования характеристик линейных систем при наличии шумов. С помощью прибора можно производить оценки математических ожиданий и корреляционных функций случайных процессов, вычислять коэффициенты ряда Фурье функций, оценивать моменты, веса линейных систем и т. д. Принцип действия прибора: графики функций $x(t)$ и $y(t)$ наносятся на бумажную ленту и считываются фототоловками. Умножение осуществляется на потенциометрах, интегрирование с помощью двигателей. П. А. Бакут

3 В140. Временные статистики шума. Brown William M. Time statistics of noise, «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, **4**, № 4, 137—144 (англ.)

Решается задача об определении временных статистик случайного процесса $F(dt)$ по известным статистикам ансамбля. Автор стремится результаты, полученные в других работах, сделать пригодными для применения в инженерной практике. Кроме изложения некоторых понятий теории случайных процессов, в статье содержится 8 теорем, из которых основной является следующая: Пусть $A(F)$ — временная статистика, $E(F)$ — статистика по ансамблю; если $A(F)$ существует и не зависит от α для почти всех α и, кроме того, $AE(F)=EA(F)$, то тогда $A(F)=AE(F)$ почти для всех реализаций $F(\alpha, t)$. Остальные теоремы, по мысли автора, должны дать удобный аппарат при исследовании различных процессов. Рассмотрено понятие эргодичности процесса. Автор стремится дать хотя и не строгие, но наглядные, с точки зрения инженера, доказательства. Разобраны примеры случайных процессов, встречающихся в радиофизике. Библ. 17 назв. В. П. Яковлев

3 В141. К обнаружению гауссовских сигналов в гауссовском шуме. Siepian D. On the detection of Gaussian signals in Gaussian noise, «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 583—587 (англ.)

Пусть $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — стационарный гауссовский процесс

$$y_{(n)} = \left(\frac{n}{T}\right)^{2m-2} \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{h=0}^{m} C_h^m (-1)^h x\left\{\frac{jm+h}{n}T\right\}\right)^2, \quad (1)$$

где $n = mg$, m и q — целые положительные числа. Предполагается, что $Mx(t) = 0$; $r(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]$. Еще предполагается, что спектральная функция процесса $\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i\omega\tau\} r(\tau)\, d\tau$ асимптотически ведет себя, как a/ω^{2s}, где s — целое положительное число. Вычисляется математическое ожидание y_n и дисперсия, и показывается, что

$$\lim_{q\to\infty} My_{qm} = \begin{cases} 0, & \text{если } s > m \\ ac_m, & \text{если } s = m, \end{cases}$$

где

$$c_m = \frac{2^{2m}\pi^{2m-1}T}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^{2m} d\xi,$$

$$\lim_{q\to\infty} Dy_{mq} = 0.$$

Пусть A — совокупность гауссовских процессов с $\varphi_A(\omega) \sim a/\omega^{2s}$, а B — соответственно с $\varphi_B(\omega) \sim b/\omega^{2(m+p)}$. Наблюдается процесс $x(t)$, строится y_n из наблюденных $x\left(j\frac{T}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $n = mq$. Если $p > 0$ выбирается $0 < y < c_m a$ и для различения гипотез предлагается правило: $x(t) \in A$, если $y_{qm} > y$; $x(t) \in B$, если $y_{qm} < y$. Если $p = 0$, но $a > b$, то выбирается $y : c_m b < y < ac_m$.

В. А. Маковский

3 В142. Оценки параметров распределения времени повреждения в случае смешанного экспоненциального распределения при ограниченном во времени испытании на долговечность. Mendenhall William. Hader R. J. Estimation of parameters of mixed exponentially distributed failure time distributions from censored life test data. «Biometrika», 1958, **45**, № 3-4, 504—520 (англ.)

Предполагается, что совокупность состоит из двух подмножеств, соответствующих разным возможным видам повреждений и смешанных в отношении $p : (1-p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Времена повреждений для i-го подмножества ($i = 1, 2$) предполагаются распределенными по закону $F_i(t) = 1 - e^{-t/\alpha_i}$ ($0 \leqslant t \leqslant \infty$). Случайная выборка объема n подвергается в течение времени T испытанию на долговечность. Пусть за это время портится r_1 экземпляров первого и r_2 экземпляров второго подмножества совокупности. Наблюдается время повреждения j-го экземпляра из i-го подмножества, t_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots, r_i$). Параметры α_i оцениваются методом максимума правдоподобия. Показано, что эти оценки дают удовлетворительный результат при большом n и большом, по сравнению с α_1 и α_2, T. Если n и T малы, оценки сильно смещены и имеют большие дисперсии. Приведено большое количество примеров, графиков и таблиц.

Б. Н. Гартштейн

3 В143. Соединение отдельных участков на линиях обслуживания. Hooper John W., Stoller David S. The aggregation of servicing facilities in queueing processes, «Conf. 6 Congr. internat. «Inst. Manag. Sci.», Paris 1959. Londres — Paris — New York — Los Angeles, s. a., 1/66—11/66 (англ.)

Рассматривается вопрос о связи между N участками обслуживающей линии для обеспечения ее наибольшей производительности. Считается, что время обслуживания и время между последовательными запросами абонентов (число которых бесконечно) имеет показательное распределение. Изучается последовательное и параллельное соединение N участков. Сравнивается их действие в случае, когда они работают отдельно друг от друга, и в случае, когда они работают как одна команда. Библ. 3 назв. Е. С. Кочетков

3 В144. Статистический анализ скученности. Cox D. R. The statistical analysis of congestion, «J. Roy. Statist. Soc.», 1955, **A118**, № 3, 324—335 (англ.)

Статья посвящена обсуждению применения известных схем массового обслуживания для теоретического предсказания скученности. Автор рассматривает основные характеристики обслуживания (загрузка, среднее время ожидания и др.) и приводит имеющиеся результаты по их определению. Обсуждается вопрос экспериментального определения этих характеристик. Замечая, что скученность обычно является результатом взаимодействия трех факторов: потока потребителей, каких-либо ограничений в доступности обслуживания и нерав-

номерностей в потоке потребителей или процессе обслуживания, или же в том и другом,— автор анализирует различные методы уменьшения скученности; уменьшение времени обслуживания или его дисперсии, управление входящими потоками, объединение нескольких очередей, обслуживание с преимуществом, увеличение числа обслуживателей. В приложении к статье изучается поведение очереди при загрузке большей 1.

И. Н. Коваленко

3 В145. Статистические свойства больших неоднородностей ионосферы. Гусев В. Д. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 2, 179—187

Решается задача об определении свойств больших неоднородностей ионосферы с помощью изучения фазы отраженных радиоволн. Предполагается, что распространение радиоволн эквивалентно отражению от некоторой эффективной неровной поверхности, состоящей из совокупности выпуклых и вогнутых зеркал. Отражающая поверхность характеризуется случайной функцией двух переменных $f(x, t)$, где t — время, x — координата точки поверхности в прямоугольной системе координат (x, z). Ось z направлена от ионосферы к Земле, плоскость $z=0$ соответствует началу отражающего слоя. Задача решается с помощью методов геометрической оптики, путем исследования дифференциального уравнения для эйконала $\varphi(x, z, t)$:

$$(\operatorname{grad}\varphi)^2 = 1 \qquad (1)$$

с граничным условием: $\varphi(x, 0, t)=f(x, t)$. Находятся условия единственности решения уравнения (1) (условие отсутствия фокусов) в предположении, что вероятности больших отклонений величин df/dx и d^2f/dx^2 от своих средних значений малы. Исследуются статистические свойства эйконала и показывается, что плотность вероятности $\partial\varphi/\partial x$ не зависит от z при любой $f(x, t)$, а плотность вероятности величины $d\varphi/dt$ не зависит от z только при нормальной совместной плотности вероятности величин df/dt и $\partial f/\partial x$. Исследуются корреляционные свойства эйконала и находится средний измеряемый радиус неоднородности, а также его зависимость от z. Показывается, что только при измерении больших неоднородностей методом регистрации вариаций эйконала отраженной волны измеряемые размеры полностью соответствуют таковым на выходе волны из ионосферы. Предположения, используемые в работе, обсуждаются на основе экспериментальных результатов. Библ. 8 назв.

В. П. Яковлев

3 В146. О характеристике стиля по Юлу. Zubrzycki S. Concerning Yule's characteristic of style, «Zastosow. mat.», 1959, **4**, № 4, 328—331 (англ.; рез. польск., русск.)

Обсуждаются предложенные Юлом и Гердаком численные характеристики стиля, основанные на частоте появления отдельных слов в выборке из текста.

М. З. Розенфельд

3 В147. Об одном методе оценки процента рождаемости и смертности, использующем регистрационные данные. Biswas Suddhendu. A note on a method of estimating birth and death rates from registration data, «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1958, 8, № 30-31, 65—72 (англ.)

При решении указанной задачи трудность заключается в том, что данные регистраций, которыми располагают индийские статистики, часто бывают далеко не точными. Упомянув о принятых двух способах оценки процента рождаемости и смертности: методе разностей, автор предлагает третий метод, так называемый «метод корректировки регистрационных данных», и указывает, в каких случаях он не может быть использован.

Ю. А. Веретенников

3 В148. Об одном эксперименте в теории переписи с контрольными посещениями. Boyarsky A. Y. An experiment in the theory of a census with control rounds, «Rev. Inst. internat. statist.», 1958, **26**, № 1-3, 48—55 (англ.; рез. франц.)

Если перепись ведется при помощи переписных листов и контрольных посещений, то задача состоит в таком разграничении этих двух этапов, которое позволило бы свести к минимуму случаи неучета временно выбывших жителей и случаи регистрации временно прибывших жителей. В работе найдено математическое ожидание числа не охваченных переписью временно выбывших жителей в предположении, что время их отсутствия распределено экспоненциально и не зависит от момента выбытия, и математическое ожидание числа временных жителей данной местности, зарегистрированных переписью. Рассматриваются и другие возможные случаи неправильного учета жителей. Для каждого из рассматриваемых случаев предлагается наиболее эффективная комбинация периода переписи и периода контрольных посещений.

Б. Н. Гарштейн

3 В149. Об одной задаче оптимальной выборки. Desabie M. Sur un problème d'échantillon «optimum». «J. Soc. statist. Paris», 1956, **97**, № 4-6, 130—135 (франц.)

Пусть требуется произвести выборку, например, среди земледельческих хозяйств, разбросанных по департаментам Франции с целью оценки средней величины хозяйства. В каждом департаменте хозяйства делятся на большие и малые. В выборку зачисляют все большие хозяйства и случайно выбранную часть малых. Автор устанавливает, что соответственно построенная оценка средней величины хозяйства по такой выборке будет иметь наименьшую дисперсию, если граничные величины a_i, выше которых хозяйства в i-м департаменте принимаются за большие, будут отличаться от средних x_i величин малых хозяйств в i-м департаменте одинаково по всем департаментам. Это будет приближенно выполняться, когда все граничные величины x_i равны. В работе несколько опечаток, например, в таблице на стр. 134.

J. Perkal

3 В150. Статистический тест для значимости коэффициента воспроизводимости. Sagi Philip C. A statistical test for the significance of a coefficient of reproducibility, «Psychometrika», 1959, **24**, № 1, 19—27 (англ.)

Приводится один из критериев проверки статистической независимости ответов на ряд дихотомических вопросов, для чего подсчитывается точное распределение коэффициента воспроизводимости. Коэффициент воспроизводимости подсчитывается путем определения минимального числа замен положительных реакций на отрицательные и наоборот для получения некоторой упорядоченной последовательности реакций на различные испытания. Наряду с этим, предлагается критерий, основанный на подсчете групп m_i положительных реакций на i-е и отрицательных на $(i+1)$-е испытание. Оба эти критерия совпадают при числе испытаний, не превышающем 3, и близки друг к другу при последовательности из 4 испытаний, но второй удобнее для подсчета. Рассмотрен вопрос об исключении из числа испытаний тех, ответы на которые дают наибольшее число ошибок.

М. А. Куликов

3 В151. Простые статистические методы скалограмного анализа. Goodman Leo A. Simple statistical methods for scalogram analysis, «Psychometrika», 1959, **24**, № 1, 29—43 (англ.)

Рассматривается применение методов математической статистики при проведении психометрических исследований. Группе обследуемых объема N предлагается тест, состоящий из K вопросов различной сложности. На основании испытаний определяются коэффициенты воспроизводимости, однородности и постоянства тестов. Приводятся критерии различения этих коэффициентов от ожидаемых при статистически независимых ответах на вопросы. Предлагаемый автором критерий отличается от приведенного в статье Сейджи критерия воспроизводимости (реф. 3В150) удобством использования для боль-

ших N и любых K. Кроме этого в статье приводится оценка дисперсии коэффициента воспроизводимости в случае отсутствия предположения о независимости исходов испытания между собой, и предлагается метод использования этой оценки для проверки альтернативной гипотезы равенства значения коэффициента некоторой априорной величине и указываются доверительные интервалы для этих коэффициентов. М. А. Куликов

3 В152. Статистические методы в психометрических исследованиях. Bose P. K. Statistical methods in psychometric research, «Proc. Indian Sci. Congr. Assoc.», 1957. Session 44 th, Part 2, Calcutta, (1957), 20—50 (англ.)

Работа носит обзорный характер и затрагивает весьма широкий круг вопросов психометрии, решаемых с помощью применения методов математической статистики. В основном автор приводит перечень основных типов задач, встречающихся в психометрии, и указывает методы их решения. В первом разделе, посвященном исследованию основных принципов психометрии, автор уделяет большое внимание вопросам конструирования психологических тестов и определению надежности и значимости психологического теста. Второй раздел посвящен разбору частных проблем психометрии. Вначале автор рассматривает вопрос сравнения оценок, полученных в результате применения не сходных между собой тестов, и указывает методы получения множества эквивалентных тестов. Далее рассматриваются вопросы определения весов различных тестов (и в этой связи вопрос отбрасывания ряда тестов из данной группы, проводимого с минимальной потерей информации). Большое внимание уделено автором классу задач, связанных с отнесением полученного наблюдения к одной из групп, различающихся по своим средним значениям. Для получения «минимального убытка» при неправильном решении автор использует метод решающих функций Вальда.

Особенно подробно автор останавливается на применениях дисперсионного анализа для определения факторов, особенно сильно влияющих на полученную оценку теста. Здесь приводится два типа моделей, с помощью которых можно определить как факторы, воздействующие на данную популяцию, так и приписываемые им веса.

Кроме этого, автор указывает на возможность построения стохастических моделей процесса самообучения и на некоторые другие возможности использования аппарата математической статистики в задачах психометрии. Работа снабжена обширной библиографией по перечисленным вопросам (64 назв.), в основном включающей фундаментальные исследования.

М. А. Куликов

3 В153. Математическая модель зависимости числа атакованных от плотностей атакуемых и атакующих видов. Watt K. E. F. A mathematical model for the effect of densities of attacked and attacking species on the number attacked, «Canad. Entomologist», 1959, **91**, № 3, 129—144 (англ.)

Статья является первой из серии статей, посвященной выяснению вопросов динамики популяций. Автор рассматривает взаимодействие между паразитами и их жертвами с учетом плотностей распределения тех и других на данной площади. При этом проводится критика ряда ранее предложенных моделей динамики популяций и предлагается новая детерминированная модель, являющаяся обобщением ранее известных. Показано трафическое соответствие ожидаемых результатов с полученными экспериментальным путем и описывается метод определения коэффициентов базисного уравнения при наличии различных исходных данных. Несмотря на ряд существенных упрощений в решении задачи (предположение о равномерной плотности распределения хищников и жертв, отказ от учета смертности тех и других и т. д.), предлагаемая модель представляет интерес для биологов. М. А. Куликов

3 В154. Определение производительной ценности на основе собственного фенотипа индивидуума и качеств предков. Skjervold Harald, Ødegård Andres K. Estimation of breeding value on the basis of the individual's own phenotype and ancestors' merits, «Acta agric. scand.», 1959, **9**, № 3, 341—354 (англ.)

Рассматривается вопрос о весах, которые нужно придавать качествам индивидуума и его предков для успешной селекции. Эти веса являются частными коэффициентами регрессии генотипа предка или индивидуума с фенотипом индивидуума. Даются формулы весов для 36 комбинаций. О. М. Калинин

3 В155. Окончательный выбор между двумя привлекательными целями: следствия из модели. Mosteller Frederick, Tatsuoka Maurice. Ultimate choice between two attractive goals: predictions from a model, «Psychometrika», 1960, **25**, № 1, 11—17 (англ.)

Рассматривается бесконечная последовательность испытаний по выбору между двумя альтернативами R и L. Постулируется следующее переходное правило:

$$p_{n+1} = \begin{cases} \alpha_1 p_n + 1 - \alpha_1, & \text{если } R \text{ выбрано в } n\text{-м испытании,} \\ \alpha_2 p_n, & \text{если } L \text{ выбрано в } n\text{-м испытании.} \end{cases}$$

Здесь p_n — вероятность выбора R при n-м испытании, $p_1 = p$, α_1, α_2 — коэффициенты обучения. Для вероятности $f(p)$, что бесконечная последовательность испытаний приведет к выбору R (организм окончательно предпочитает R), получается следующее функциональное уравнение: $f(p) = pf(\alpha_1 p + 1 - \alpha_1) + (1 - p)f(\alpha_2 p)$ с граничными условиями $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Изучается решение этого уравнения для разных α_1 и α_2. Предлагаются приближенные способы решения (сведение к системе с n неизвестными с помощью конечных разностей и к дифференциальному уравнению с помощью ряда Тейлора). Разбираются и сравниваются численные примеры. Рассматривается более сложная ситуация, когда выбор альтернативы R вознаграждается с вероятностью π_1, а выбор L вознаграждается с вероятностью π_2. Для получившегося функционального уравнения строится приближенное решение с помощью дифференциального уравнения и вычисления сравниваются с экспериментами на вычислительной машине (метод Монте-Карло).

О. М. Калинин

3 В156. Регрессионный и причинный анализ в биологии. Wette R. Regressions- und Kausalanalyse in der Biologie, «Metrika», 1959, **2**, № 2, 131—137 (нем.)

Доклад, прочитанный на Международном биометрическом семинаре в Линце на Дунае в 1956 г. Отмечается, что для исследования причинного характера биологических связей неприменимы методы регрессионного или корреляционного анализа. Рекомендуется пользоваться линией органической корреляции, устанавливающей однозначную связь между переменными. Л. Н. Большев

3 В157. К математической теории популяций по Нейману и Скотту. Consael R. Sur la théorie mathématique des populations selon J. Neyman et E. L. Scott, «Bull. cl.sci. Acad. roy. Belg.», 1959, **45**, № 9, 845—858 (франц.)

Изучается размножение и распространение на плоскости популяции мужских и женских особей. Через равные промежутки времени женские особи независимо друг от друга могут давать потомство. Закон распределения числа потомков произвольный, распределение пола при заданном числе потомков происходит по биномиальному закону. Особи случайно блуждают по плоскости независимо друг от друга. Плотность распределения каждой особи удовлетворяет уравнению Чепмена — Колмогорова. Получены рекуррентные формулы для производящих функций совместных распределений числа потомков различных поколений, находящихся в определенных частях плоскости. Кроме того, рассматривается схема размножения, в которой момент рождения предполагается случайным. В. П. Чистяков

3 В158. Последующая история легочного туберкулеза: стохастическая модель. Alling David W. The after-history of pulmonary tuberculosis. A stochastic model, «Biometrics», 1958, **14**, № 4, 527—547 (англ.)

Открытая форма туберкулеза О может привести к смерти больного С. При надлежащем лечении форма О может смениться закрытой формой З. Ставится задача предсказания процентного соотношения форм О, З и С в будущем, если в начальный момент вся группа больных имела форму О. Предполагается, что промежуток времени между периодическими обследованиями больных не очень велик и поэтому можно считать, что за время между двумя обследованиями больной из состояния О может перейти как в О и З, так и в С, а из состояния З — только в З и О; состояние С является поглощающим. Отмечается, что стохастическая модель, представляющая собой однородную по времени цепь Маркова с тремя состояниями О, З и С, плохо описывает последующую историю легочного туберкулеза. Исходя из некоторых медицинских гипотез, автор предлагает разбить З на два состояния, а О — на три и рассматривать однородную по времени цепь Маркова с шестью состояниями O_1, $З_1$, С, $З_2$, O_2, O_3. При этом первые три состояния образуют «поглощающий экран», а для последних трех состояний матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & p_{52} & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 \\ 0 & 0 & p_{63} & 0 & 0 & p_{66} \end{Vmatrix}$$

Указанные вероятности, а также вероятности начального распределения связаны некоторыми естественными соотношениями и зависят лишь от шести свободных параметров. Разработана процедура оценки этих параметров методом наибольшего правдоподобия по результатам периодического обследования, при котором различаются лишь случаи О, З и С. На конкретных данных медицинской статистики демонстрируется, что в течение десяти обследований больных истинное распределение случаев О, З и С хорошо согласуется с предсказанием, основанным на данной усложненной стохастической модели.

Л. Н. Большев

3 В159. Уменьшение активности вирусов при помощи формальдегида как попадание. Stur D. Die Virusinaktivierung durch Formaldehyd als Trefferereignis. «Metrika», 1959, **2**, № 1, 62—77 (нем.)

Делается попытка изучать уменьшение активности вирусов под действием некоторой вакцины по аналогии с теорией попаданий в цель при стрельбе. Рассматривается N_0 вирусов, находящихся в «обстреливаемом» объеме V. За единичную принимается 37%-я доза вакцины.

Предполагается, что число вирусов, переживших обстрел дозой D, распределяется по закону Пуассона: $p_0 = N_0 e^{-VD}$. Изучается остаточная активность, т. е. доля выживших вирусов. Найденные для нее по приближенным формулам значения сравниваются с экспериментальными данными вирусологов. Б. Н. Гарттштейн

3 В160. Нормальное, биномиальное и пуассоновское распределения. Vashi D. G. The normal, binomial and Poisson distribution. «J. Indian Med. Profess.», 1959, **6**, № 4, 2720—2726 (англ.)

Статья посвящена применениям математической статистики в области медицины. Изложение построено на примерах. Новых результатов не содержится.

Л. Н. Куцев

3 В161. Примеры различных приложений статистических методов. Cavé René. Exemples divers d'applications des methodes statistiques. «E. Q. Bull.», 1959, № 6, 149—153 (франц.)

На примерах из различных областей иллюстрируется применение методов математической статистики. Новых результатов статья не содержит. Л. Н. Куцев

3 В162. Анализ экспериментов по скорости роста. Leech F. B., Healy M. J. R. The analysis of experiments on growth rate, «Biometrics», 1959, **15**, № 1, 98—106 (англ.)

Дается метод анализа экспериментов, в которых измерения одного и того же организма проводятся через одинаковые промежутки времени. Обсуждаются оценки эффектов обработок. Метод затем применяется к экспериментам, связанным с исследованием роста свиней.

Резюме автора

3 В163. Некоторые применения многомерных методов в ботанике. Pearce S. Clifford, Holland Derek A. Some applications of multivariate methods in botany, «Appl. Statist.», 1960, **9**, № 1, 1—7 (англ.)

Методы анализа компонент дисперсии и факторного анализа дискутируются с точки зрения биологических задач.

3 В164. Теория случайных процессов и страховая статистика. Зависимые и независимые вероятности. Klinken J. van. The theory of random processes and actuarial statistics. Dependent and independent probabilities, «Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker», 1959, **59**, № 1, 139—162 (англ.; рез. нем., франц., итал.)

Показано, что некоторые встречающиеся в страховой статистике схемы могут быть изучены при помощи элементарных случайных процессов, в частности, процесса Пуассона. Для модели Пуассона приводятся без доказательства решения некоторых конкретных задач. Формулируются два критерия проверки гипотезы равного риска несчастных случаев на различных предприятиях.

Б. Н. Гарттштейн

3 В165. К теории измерения смертности. Grenander Ulf. On the theory of mortality measurement. Part II. «Skand. aktuarietidskr», 1956, № 3-4, 125—153 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1960, 8103. Некоторые методы оценки параметров закона Макегама в исследованиях смертности изучаются с точки зрения их эффективности. Использованные методы применимы в общем случае, хотя в этой статье они применяются только для одного частного случая. Желательно распространить эти результаты на другие методы оценки, например, когда метод Кинга-Харди употребляется для одновременного определения α, β и c. Необходимо также исследовать потерю информации при использовании некоторых стандартов «приближенной» техники. Из резюме автора.

3 В166 К. Страховая математика. Ч. 2. Saxer W. Versicherungsmathematik. 2. Teil. Berlin, Springer, 1958, 283 S. (нем.)

Часть 1 см. РЖМат, 1957, 8127. В реферируемой книге, написанной в более «высоком» стиле (в смысле применения математического аппарата), чем обычные учебники по страховой математике, автор ставил себе цель — показать, что решение важных технических проблем страховой практики может быть получено только при помощи математического аппарата теории вероятностей и статистики. Изложение в книге построено таким образом, что оно охватывает одновременно как дискретную, так и непрерывную методику в теории страхования. Это достигается применением интеграла Стилтьеса. В задачах страховой математики элементарный интеграл Стилтьеса оказывается недостаточным, и автор пользуется его модификацией, которую он называет интегралом Стилтьеса—Шерфа. В гл. 1 приводятся необходимые сведения о функциях ограниченной вариации и интеграле Стилтьеса. В гл. 2 выводятся основные формулы теории страхования жизни, исходящей из детерминистических представлений (без учета фактора случайности). Рассмотрению проблемы страхования с точки зрения случайных процессов посвящена гл. 3. В большей части главы излагаются основные сведения по теории вероятностей. Что касается приложений к теории страхования, то они не носят систематического ак-

тера. Здесь впервые в учебной литературе рассматриваются вопросы страхования несчастных случаев. За более подробным изложением теоретико-вероятностной теории страхования автор отсылает к монографиям других исследователей. Краткий очерк математической теории восстановления составляет содержание гл. 4. В гл. 5 рассматриваются методы выравнивания таблиц смертности. Отдельные параграфы посвящены интерполяционным формулам, методу наименьших квадратов, ортогональным многочленам и выравниванию с помощью ортогональных многочленов, методу минимума χ^2, критериям согласия и другим вопросам. В целом книга представляется интересной и содержательной, но круг лиц, для которых она будет полезна в нашей стране, весьма узок. По рецензии И. И. Гихмана в сб. «Новые книги за рубежом», 1959, № 11.

3 В167 Д. Применение теории вероятностей к исследованию показателей оптовых и пересылочных предприятий и планированию расположения отделений с целью кратчайшего транспортного пути. Ortlieb Ivar. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Untersuchung der Kenngrößen von Engros- und Versandbetrieben und die Planung des Layouts der einzelnen Abteilungen mit dem Ziel kürzester Transportwege beim Zusammenstellen der Sendungen. Diss., Dokt. techn. Wiss., Eidgenöss. Techn. Hochschule Zürich. St. Gallen, Zollikofer und Co. AG., 1957, 21 S., ill. (нем.)

Изучается работа оптового предприятия на основе исследования 3813 заказов. Показывается, что многие показатели (типа: вес заказа, стоимость заказа и т. п.) распределены логарифмически нормально. Исследуется задача расположения отделений, из которых поступают товары, в целях сокращения транспортирования с учетом частоты требований на различные товары. Исследуется вопрос о возможно меньшем количестве товара, необходимом для выполнения всех заказов за определенный промежуток времени с достаточно большой вероятностью.

Д. М. Чибисов

См. также: 3А20, 3А128, 3А139, 3А322, 3А150—3А154, 3Б259, 3Б480, 3В223, 3В224.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

3 В168. Численное решение краевых задач. Wachspress Eugene L. The numerical solution of boundary value problems. «Math. methods digital computers». New York—London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 121—127 (англ.)

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dx}[p(x)Y']+q(x)Y=f(x),$$

где p, q и f — кусочно-непрерывные, а Y и pY' — непрерывные в $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ функции, с краевыми условиями

$$\alpha_1 Y(\alpha)-\alpha_2[p(\alpha)Y'(\alpha)]=\alpha_3,$$
$$\beta_1 Y(\beta)+\beta_2[p(\beta)Y'(\beta)]=\beta_3,$$

аппроксимируется трехточечным разностным уравнением вида

$$-a_i Y_{i-1}+R_i Y_i-c_i Y_{i+1}=d_i \qquad (1)$$

путем осреднения коэффициентов p, q и f на $[x_i, x_{i+1}]$ и аналитического решения полученных таким путем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для решения системы трехчленных уравнений (1) описан метод прогонки

$$s_i=c_i/(R_i-a_i s_{i-1}),\quad e_i=(d_i+a_i e_{i-1})/(R_i-a_i s_{i-1}),$$

$Y_n=e_n$, $Y_i=s_i Y_{i+1}+e_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ и подробно исследована его устойчивость. Рассмотрен числовой пример. Приведена блок-схема программы. Библ. 5 назв.

В. К. Саульев

3 В169. Преобразования, применимые при численном интегрировании. Grosswald Emil. Transformations useful in numerical integration methods. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1959, 7, № 1, 76—84 (англ.)

Требуется получить серию частных решений системы

$$dx/dt=Ax+f(t), \qquad (1)$$

где A — постоянная матрица порядка m, при различных начальных условиях; решения должны быть получены в табличном виде с шагом h с заданной точностью на интервалах $0 \leqslant t \leqslant nh$ (n различно для разных частных решений). Задачу можно решать различными методами: численным интегрированием, составлением таблиц значений точного решения, полученного в явном виде ($f(t)=\sum v_k e^{\alpha_k t}$), а также приемом, предложенным автором и основанном на лемме: Если $B=e^{Ah}-1$; $g(n)=e^{A(n+1)h}\int_{nh}^{(n+1)h} e^{-A\tau} f(\tau)\,d\tau$ и $y_1, y_2, \ldots$ определяются из разностного уравнения $y_{n+1}-y_n=By_n+g(n)$ с начальным условием $y_0=x_0$, то $y_n=x(nh)$, где $x(t)$ — решение данной системы (1) при начальном условии $x(0)=x_0$. Подсчитывается число операций и выделяются случаи, когда выгодно численное интегрирование (например, при малых n и больших m), когда — точное решение и когда наилучшим является предлагаемый метод (при специфических условиях, одно из которых — большой «разброс» значений n для разных частных решений).

М. Л. Бродский

3 В170. Метод оценки точности решения задач управления движением контура нефтеносности. Цыбульский Г. П. «Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н.», 1959, вып. 13, 91—99

Предлагается методика оценки разности решений двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты являются непосредственным следствием известных условий разрешимости задачи Чаплыгина (см., например, РЖМат, 1957, 8610, 8611; 1960, 599). Приведен пример оценки отклонения координат заданного и действительного контуров нефтеносности при концентричном стягивании кругового контура двумя батареями по 4 скважины, расположенных шахматно.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

3 В171. Новый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Бюнда ренко П. С. «Укр. матем. ж.», 1960, 12, № 2, 118—131 (рез. англ.)

Рассматривается задача Коши

$$dx/dt=f(t, x),\ x(t_0)=x_0,\ (t_0, x_0)\in D, \qquad (1)$$

где $f(t, x)$ определена в замкнутой области $\bar{D}$ и по крайней мере непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x. Кусочно-линейная функция

$$\overset{n}{x}(t)=\overset{n}{x_0}+h_n\sum_{j=0}^{k-1}c_j+(t-t_k)c_k,\ t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1},$$
$$k=0, 1, \ldots, n-1,$$

построенная по узлам

$$t_j = t_0 + jh_n,\ h_n = \frac{T - t_0}{n},\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

называется h_n-приближенным решением задачи (1), на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, если при любом значении $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия

$$(t, \overset{n}{x}(t)) \in D,\ t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\frac{1}{h_n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} | f(t, \overset{n}{x}(t)) - c_k | dt = O(h_n),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(см. определение ε-приближенного решения аналогичной задачи — В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1949, стр. 10). Доказывается равномерная на $[t_0, T]$ сходимость любой последовательности h_n приближенных решений задачи (1) к функции $x(t)$, которая является единственным решением этой задачи. Отмечается, что приближенные решения задачи (1) в узлах t_j, $j = \nu, \ldots, n$ $(n > 0)$ можно определить любым из известных разностных методов Эйлера, Рунге или Адамса, каждый из которых записывается в виде

$$\overset{n}{x}_{k+1} = h_n c(t_k, \overset{n}{x}_k),\ k = \nu, \ldots, n-1; \qquad (2)$$

приводятся выражения угловых коэффициентов $c(t_k, \overset{n}{x}_k)$ для каждого из названных методов. Затем через $\overset{n}{x}_k^*$ обозначаются «вычисленные по схеме (2) величины после их округления» и кусочно-линейная функция

$$\overset{n}{x}^*(t) = \overset{n}{x}_\nu^* + h_n \sum_{j=0}^{k-1} c(t_j, \overset{n}{x}_j^*) + (t - t_k) c(t_k, \overset{n}{x}_k^*),$$

$$t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},\ k = \nu, \ldots, n-1,$$

где $h_n = \alpha^*/n$, называется реальным h_n-приближенным решением задачи (1), если выполняются условия $(t, \overset{n}{x}^*(t)) \in \Pi$, $t_\nu \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha^*$, $| \overset{n}{x}_k^* + h_n c(t_k, \overset{n}{x}_k^*) - \overset{n}{x}_{k+1}^* | \leqslant \delta$, где Π — прямоугольник с центром в точке (t_0, x_0), принадлежащей области D. В лемме 4 утверждается, что при помощи методов Эйлера, Рунге и Адамса можно построить реальные h_n-приближенные решения. Далее выводится интегральное уравнение погрешности $z(t) = x(t) - \overset{n}{x}^*(t)$ реального h_n-приближенного решения:

$$z(t) = z_\nu \exp\left\{\int_{t_\nu}^{t}\int_0^1 \frac{\partial f(\tau, \overset{n}{x}^* + \theta z)}{\partial x} d\theta d\tau\right\} +$$

$$+ \int_{t_\nu}^{t} \tilde{\varepsilon}(s) \exp\left\{\int_s^t\int_0^1 \frac{\partial f(\tau, \overset{n}{x}^* + \theta z)}{\partial x} d\theta d\tau\right\} ds,$$

$t_\nu \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha^*$, где $\tilde{\varepsilon}(t) = f(t, \overset{n}{x}^*(t)) - c(t_k, \overset{n}{x}_k^*)$;

описывается метод последовательных приближений для решения этого уравнения и доказывается его сходимость. В связи с этим делается вывод, что h_n-приближенное решение задачи (1) может быть найдено с любой наперед заданной степенью точности. В процессе доказательства сходимости названного метода последовательных приближений устанавливается возможность продолжения h_n-приближенного решения задачи (1). В конце статьи приводятся апостериорные оценки приближенного решения задачи (1), вычисленного по методу Эйлера, Адамса или Рунге.

Вопросы, относящиеся к построению реального h_n-приближенного решения, в статье освещены скупо и недостаточно отчетливо (так, например, совсем не разъяснено, как вычисляются угловые коэффициенты $c(t_k, \overset{n}{x}_k^*)$ в выражении (2), величина δ, входящая в определение реального h_n-приближенного решения, не охарактеризована и пр.). Несколько более полное объяснение этих вопросов в связи с вычислением приближенных решений задачи (1) методами Эйлера и Адамса можно найти в статьях референта, опубликованных совместно с Б. М. Будаком (РЖМат, 1960, 9527). Числовые примеры отсутствуют. А. Д. Горбунов

3 В172. О численном продолжении решения задачи с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Бондаренко П. С. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 4, 739—742

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \quad (t_0, x_0) \in D, \qquad (1)$$

где $f(t,x)$ — непрерывная вектор-функция в некоторой области D пространства $(t, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, и излагаются предложения, полученные автором в порядке перенесения или обобщения предложений, изложенных им в связи с одним обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (реф. 3В171). Полнее, чем в названной статье, здесь излагаются соображения о численном продолжении решения задачи (1) (следует иметь в виду, что вопрос о продолжении решения задачи (1) разбирается в ряде учебников и монографий. См., например, книгу В. В. Немыцкого и В. В. Степанова, Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 16—19). А. Д. Горбунов

3 В173. Определение критических нагрузок для балок (полос) и колонн (при шарнирном опирании концов). Алексеев П. И. «Научн. докл. высш. школы. Строительство», 1959, № 2, 93—103

Излагается способ, основанный на математической аналогии между задачами устойчивости стержней и задачей определения квадрата частоты гармонических колебаний струны переменной плотности $\rho(x)$, натянутой единичной силой между точками $x = 0$ и $x = l$. Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения вида $y'' + \lambda \rho(x) y = 0$, при граничных условиях $y(0) = y(l) = 0$. Квадрат первой частоты определяется по приближенной формуле М. Крейна (Прикл. матем. и механ., 1951, **15**, 342). Для исследования устойчивости балки (полосы) рассмотрен изгиб полосы с опертыми концами, причем опорные закрепления допускают свободное вращение концов относительно главных осей инерции сечения. Хорошая точность предложенного способа подтверждается примерами определения коэффициентов устойчивости при простых нагрузках полосы. Сложная нагрузка полосы при определении коэффициентов устойчивости рассматривается как состоящая из двух простых нагрузок. Интегралы Мора вычислены способом Верещагина. Отмечается, что метод применим и при действии трех обобщенных сил. Изложенное проиллюстрировано примерами. Предложенный метод, базирующийся на простых операциях над эпюрами, дает существенную экономию в вычислениях, причем отключения от точных решений в рассмотренных примерах не превышают 3%. И. Ф. Шелихова

3 В174. Получение границ для собственных значений при помощи принципа минимакса. Bollermann Werner. Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 7-8, 342—349 (нем.; рез. англ., русск.)

Исследуется самосопряженная задача на собственные значения

$$M[y] = kN[y],\ U_j[y] = 0, \qquad (1)$$

где M и N — линейные обыкновенные дифференциальные операторы соответственно порядков $2p$ и $2q$ ($p > q \geqslant 0$), а U — граничный оператор, не содержащий собственного значения k. Верхние оценки для собственных значений задачи (1) рекомендуется получать при помощи метода Ритца — Галеркина. Для получения нижних оценок используется принцип минимакса в следующей форме: Пусть w_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) — произвольная линейно независимая система интегрируемых функций. Если все функции сравнения u ортогональны к w_i ($\int_a^b uw_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$), то $\inf R(u) \leqslant k_n$, где k_n — n-е собственное значение задачи (1), а $R(u)$ — отношение Релея ($R(u) = \int_a^b uM[u]\,dx / \int_a^b uN[u]\,dx$). В качестве w_i автор выбирает функции $w_i \equiv N^*[y_i^*]$, получающиеся из «соседней» задачи

$$M^*[y] = k^*N^*[y] \equiv k^*(-1)^q (g_q^* y^{(q)})^{(q)},\ U_j[y] = 0, \quad (2)$$

где $g_q^* > 0$, оператор M^* также $2p$-го порядка и граничные условия $U_j[y] = 0$ содержат условия

$$y_a^{(s)} = y_b^{(s)} = 0,\ s = 0, 1, \ldots, q-1. \quad (3)$$

При выполнении условия (3) и $R(y_n^*) < k_{n+1}^*$ (k_n^* и y_n^* — соответственно n-е собственное значение и n-я собственная функция задачи (2)) автор получает четыре оценки снизу для n-х собственных значений задачи (1). В частности,

$$1) \quad k_n \geqslant R(y_n^*) - \max S_n(R) / \int_a^b y_n^* N[y_n^*]\,dx, \quad (4)$$

$$(0 < P_n \leqslant R \leqslant R[y_n^*] \text{ или } 0 \geqslant R \geqslant R[y_n^*]),$$

$$2) \quad k_n \geqslant R_{\min}, \quad (5)$$

$R_{\min}$ — наименьшее решение уравнения

$$R = R[y_n^*] - S_n(R) / \int_a^b y_n^* N[y_n^*]\,dx$$

в интервале $0 < P_n \leqslant R \leqslant R[y_n^*]$, где

$$S_n(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_a^b y_{n+j}^* (M^{(1)}[y_n^*] + RN^{(1)}[y_n^*])\,dx\right]^2 / (k_{n+j}^* - R),$$

$M^{(1)}[y] = M[y] - M^*[y]$, $N^{(1)}[y] = N[y] - N^*[y]$ (оценка для $S_n(R)$ приводится). Приводятся три примера. Так, для задачи $-y'' = k(2 + \cos x)y$, $y_0 = y_\pi = 0$ оценки (4) и (5) дают соответственно $0{,}4875 \leqslant k_1$ и $0{,}4882 \leqslant k_1$ (в качестве верхней границы, вычисленной при помощи метода Ритца — Галеркина, принята $k_1 \leqslant 0{,}4901$). Библ. 10 назв. В. К. Саульев

3 В175. Оценка погрешности метода сеток для двумерной задачи Неймана. Лебедев В. И. «Докл. АН СССР», 1960, 132, № 5, 1016—1018

Оценивается порядок погрешности решения при решении задачи Неймана для уравнения Лапласа. Рассматривается случай слабой аппроксимации граничных условий и доказывается, что во внутренних точках области порядок ошибки такой же, как в случае сильной аппроксимации граничных условий того же порядка. Получены так же оценки для разделенных разностей ошибки. Прилагается поправка к одной ранее опубликованной работе автора. Н. С. Бахвалов

3 В176. Самосопряженная краевая задача. Stiefel E. The self-adjoint boundary value problem. «Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zürich», 1959, № 8, 7—23 (англ.)

Автор отмечает, что, с точки зрения численного анализа, выгоднее иметь дело с вариационными задачами, чем с краевыми задачами для соответствующих дифференциальных уравнений Эйлера, так как в первом случае естественные граничные условия выполняются автоматически. Кроме того, получающиеся при аппроксимации интегралов в экстремальных задачах системы линейных алгебраических уравнений всегда симметричны (рассматриваются только самосопряженные краевые задачи). Основное правило кратко формулируется так: надо аппроксимировать интеграл («метод энергии»), но не дифференциальное уравнение Эйлера. В качестве первого примера рассматривается вариационная задача

$$\min = \frac{1}{2}\iint_G \operatorname{grad}^2 u\,dxdy + \iint_G f(x, y)u\,dxdy, \quad (1)$$

где G — прямоугольная область, стороны которой параллельны осям координат, $f(x, y)$ — заданная в G функция. При этом на горизонтальных сторонах прямоугольника G функция $u(x, y) \equiv 0$, а на вертикальных — произвольна. Непосредственная аппроксимация на квадратной сетке с шагом h соотношения (1) приводит автора к обычным сеточным уравнениям $4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + h^2 f_{i,j} = 0$ во внутренних узлах и к уравнениям типа

$$4u_{i,j} - 2u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} + h^2 f_{i,j} = 0$$

в узлах, находящихся на вертикальных сторонах данного прямоугольника (при аппроксимации на той же сетке уравнения $\Delta u = f(x, y)$ на вертикальных сторонах прямоугольника G необходимо специально аппроксимировать условие $\partial u/\partial n = 0$). В этом же аспекте исследуются девятиточечные сеточные уравнения повышенной точности и краевая задача для бигармонического уравнения.

В. К. Саульев

3 В177. Оценка погрешности численного решения эллиптического дифференциального уравнения. Nitsche Joachim, Nitsche Johannes C. C. Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1960, **5**, № 4, 293—306 (англ.)

Уравнение

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

заданное в квадрате $0 < x, y < 1$ с условием $u = 0$ на границе этого квадрата, заменяется простейшей системой сеточных уравнений

$$a_{i,k}\nabla_{xx}U_{i,k} + 2b_{i,k}\nabla_{xy}U_{i,k} + c_{i,k}\nabla_{yy}U_{i,k} = F_{i,k}, \quad (2)$$

где

$$\nabla_{xx}U_{i,k} = (U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k})/h^2,$$

$$\nabla_{yy}U_{i,k} = (U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1})/h^2,$$

$$\nabla_{xy}U_{i,k} = (U_{i+1,k+1} - U_{i-1,k+1} + U_{i-1,k-1} - U_{i+1,k-1})/4h^2,$$

h — длина шага квадратной сетки. Предполагая коэффициенты a, b, c в замкнутом квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ непрерывными, а функцию $f(x, y)$ интегрируемой с квадратом в $0 < x, y < 1$ и считая уравнение (1) равномерно эллиптическим в заданной области (существуют две константы q и Q ($0 < q \leqslant Q$) такие, что $q(\xi^2 + \eta^2) \leqslant a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqslant Q(\xi^2 + \eta^2)$ для любых вещественных чисел ξ и η и всех x и y из $0 \leqslant x, y \leqslant 1$), авторы для погрешности $|u - U|$ получают следующую оценку

$$\max_{1 \leqslant i, k \leqslant N} |u(ih, kh) - U_{i,k}| \leqslant C_1 \| \omega_{h^{2/5}}^2(f) - F \|_g + C_2 \varepsilon_{h^{2/5}}(a, b, c) \| f \| + C_3 h^{2/5} \| f \|, \quad (3)$$

где C_i $(i=1, 2, 3)$ — постоянные, зависящие только от эллиптичности уравнения (1) (т. е. от величин q и Q), $\varepsilon_\rho(a, b, c)=\max\{\varepsilon_\rho(a), \varepsilon_\rho(b), \varepsilon_\rho(c)\}$, $\varepsilon_\rho(d)$ — модуль непрерывности ($\varepsilon_\rho(d)=\max|d(x_1, y_1)-d(x_2, y_2)|$ для $0\leqslant x_1, x_2, y_1, y_2\leqslant 1$ и $|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\leqslant\rho$),

$$\omega_\rho(v)=\frac{1}{\rho^2}\int_{x-\rho/2}^{x+\rho/2}\int_{y-\rho/2}^{y+\rho/2} v(\xi, \eta)\,d\xi d\eta,$$

$$\|f\|^2=\iint\limits_{0\leqslant x, y\leqslant 1} f^2 dxdy,$$

$$\|f\|_g^2=h^2\sum_{i, k=1}^{N} f_{i, k}^2, \quad h=1/(N+1).$$

Если f — непрерывная функция, то член $\|\omega^2_{h\,2/5}(f)-F\|_g$ можно заменить на $4\varepsilon_{h^{2/5}}(f)$. Вывод оценки (3) основывается на предварительном доказательстве ряда неравенств. В частности, для решения уравнения (2) устанавливается неравенство

$$\|\nabla_{xx}U\|_g^2+2\|\nabla_{xy}U\|_g^2+\|\nabla_{yy}U\|_g^2\leqslant\frac{2Q^2}{q^4}\|F\|_g^2.$$

Используется разностный аналог неравенства С. Л. Соболева

$$\max_{1\leqslant i, k\leqslant N}|W_{i, k}|\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{1+\pi}\,\|(\nabla_{xx}+\nabla_{yy})W\|_g,$$

где $W_{i, k}$ равна нулю в узлах, находящихся на сторонах квадрата. Вводится и широко применяется класс функций H_α: функция $v\in H_\alpha$, если ряд

$$1/4\sum_{m, n=1}^{\infty}(1+m^2+n^2)^\alpha (v^{mn})^2\equiv\|v\|_\alpha^2,$$

где $v^{mn}=4\iint v(x, y)\sin(\pi mx)\sin(\pi ny)dxdy$, сходится. Доказывается несколько вспомогательных утверждений. Например, если $v\in H_\alpha$ $(\alpha>1)$, то v непрерывна в $0\leqslant x, y\leqslant 1$; если $v\in H_\alpha(\alpha\geqslant 0)$, то $\omega_\rho(v)\in H_{\alpha+1}$ и $\|\omega_\rho(v)\|_{\alpha+1}\leqslant 4\sqrt{3}\,\|v\|_\alpha/\pi^2\rho^2$; если $a(x, y)$ — непрерывная функция и $v\in H_0$, то $\|a\omega_\rho^2(v)-\omega_\rho^2(av)\|_g\leqslant 4\varepsilon_\rho(a)\|v\|$. Чтобы обойти трудности, возникающие в связи с тем, что вторые производные и разностные отношения принадлежат к классу H_0 (решение уравнения (1) принадлежит H_2), авторы используют сглаживающий процесс согласно соотношению $\tilde{u}(x, y)=\omega_\rho^2(u)(x, y)\equiv\omega_\rho(\omega_\rho(u))(x, y)$. В связи с этим устанавливаются, например, следующие оценки: $\tilde{u}(x, y)\in H_4$ и $\|\tilde{u}\|_4\leqslant C_4\rho^{-4}\|f\|$, $\|D^2\tilde{u}-\nabla^2\tilde{u}\|_g\leqslant C_5h^2\rho^{-4}\|f\|$, где D^2 — любая вторая частная производная, а ∇^2 — соответствующее разностное отношение.

В. К. Саульев

3В178. Итерационные методы для решения эллиптических дифференциальных уравнений. Sheldon J. W. Iterative methods for the solution of elliptic partial differential equations. «Math. methods digital computers». New York—London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 144—156 (англ.)

Краевая задача для дифференциального уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial U}{\partial y}\right)+aU-S=0$$

аппроксимируется системой сеточных уравнений

$$Az-d=0, \qquad (1)$$

где A — квадратная симметричная матрица порядка N, z — искомый вектор, а d — известный вектор. Для решения системы (1) исследуются линейные итерационные методы первой степени

$$z^{(p)}=H_pz^{(p-1)}+M_pd, \quad p=1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

где H_p и M_p не зависят от d и $H_p+M_pA=E$ (E — единичная матрица), погрешность $\varepsilon^{(p)}=z^{(p)}-z$ которых удовлетворяет равенству $\varepsilon^{(p)}=K_p\varepsilon^{(0)}$ $\left(K_p=\prod_{q=1}^{p}H_q\right)$. В качестве меры скорости сходимости метода (2) используется величина $\max(\|\varepsilon^{(p)}\|/\|\varepsilon^{(0)}\|)$ (применяется евклидова норма). Устанавливается равенство

$$\max\frac{\|\varepsilon^{(p)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|}=\tau(K_p),$$

где $\tau(A)$ — спектральная норма, равная квадратному корню из спектрального радиуса ρ матрицы $A'A$ ($\tau(A)=\sqrt{\rho(A'A)}$). Более подробно исследуются стационарные методы ($H_p\equiv H$) с линейным ускорением

$$\xi^{(p)}=Hz^{(p-1)}+Md, \qquad (3)$$

$$z^{(p)}=\xi^{(p)}+\omega_p(\xi^{(p)}-z^{(p-1)}) \qquad (4)$$

(ω_p — множитель ускорения), для которых

$$K_p=\prod_{q=1}^{p}[(1+\omega_q)H-\omega_qE].$$

В частности рассматриваются методы, для которых $K_p(H)=T_p(aH+bE)/T_p(a+b)$, где $a=2/(x_1-x_0)$, $b=-(x_1+x_0)/(x_1-x_0)$, $x_0\leqslant\lambda_i\leqslant x_1<1$ (λ_i — собственные значения матрицы H), а $T_p(\xi)$ ($\xi=ax+b$) — полиномы Чебышева. В этом случае при $a+b$, близких к 1 и больших p, некоторые из ω_p очень большие. В силу этого метод (3), (4) неустойчив по отношению к погрешностям округлений. Эту трудность можно обойти применением вместо (4) ускорения второй степени

$$z^{(p)}=2a\alpha_p\xi^{(p)}+2b\alpha_pz^{(p-1)}-\beta_pz^{(p-2)},$$

где $\alpha_p=T_{p-1}(a+b)/T_p(a+b)$, $\beta_p=T_{p-2}(a+b)/T_p(a+b)$. Подробно описывается также метод последовательного исправления

$$z_m^{(p)}=z_m^{(p-1)}+\omega\Big(\sum_{n<m}b_{mn}z_n^{(p)}-z_m^{(p-1)}+\sum_{m>n}b_{mn}z_n^{(p-1)}+d_m\Big),$$

где ω — множитель верхней релаксации, а b_{mn} — элементы матрицы B, $B=E-A$ ($b_{mm}\equiv 1$); в этом случае $H=(E-\omega F)^{-1}[(1-\omega)E+\omega F']$, $M=(E-\omega F)^{-1}\omega$, где F — квадратная матрица, элементы которой ниже диагонали равны $b_{m, n}$, а остальные 0. Доказывается ряд теорем. Например, теорема 1: Если μ — собственное значение матрицы B, то два собственных значения λ_1 и λ_2 матрицы

$$\begin{pmatrix}1-\omega & \omega\mu\\ (1-\omega)\omega\mu & \omega^2\mu^2+1-\omega\end{pmatrix}$$

являются собственными значениями матрицы H.

Теорема 2. Если μ — собственное значение матрицы B, а λ — собственное значение матрицы H, то $(\lambda+\omega-1)^2=\mu^2\omega^2\lambda$.

Теорема 3. Если q_1 — больший корень уравнения $q^2-\left[8p^2+4p^2\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+2\right]q+1=0$, то

$$\tau\{[H(\omega_b)]^p\}=q_1^{1/2}\{\rho[H(\omega_b)]\}^p,$$

где $r^2=\omega_b-1$, а ω_b — оптимальный множитель релаксации, определяемый по формуле

$$\omega_b = 1 + \{\rho(B)/[1 + (1 - \rho^2(B))^{1/2}]^2.$$

Рассматриваются также методы, являющиеся комбинацией методов, использующих полиномы Чебышева, и метода последовательного исправления. Библ. 23 назв.

В. К. Саульев

3 В179. Теория градиентных методов. Rutishauser H. Theory of gradient methods. «Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zürich», 1959, № 8, 24—49 (англ.)

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax + b = 0, \qquad (1)$$

где A — симметричная, положительно определенная матрица. Градиентным методом решения системы (1) автор называет метод

$$x_{k+1} = x_k + L(r_0, r_1, \ldots, r_k), \qquad (2)$$

где x_k — k-е приближение, а $L(r_0, \ldots, r_k)$ — линейная комбинация невязок r_i ($r = 0, 1, \ldots, k$), удовлетворяющих соотношению $r_i = Ax_i + b = \operatorname{grad} Q(x)$ ($x = x_i$); при этом коэффициент при r_k отличен от нуля. Из (2) автор получает равенство $r_k = R_k(A) r_0$, где $R_k(\lambda)$ — полином степени k, удовлетворяющий условию

$$R_k(0) = 1. \qquad (3)$$

После k шагов градиентного метода (2) компонента начальной погрешности, соответствующая j-му собственному вектору, уменьшается в $R_k(\lambda_j)$ раз (λ_j — j-е собственное значение матрицы A). Отсюда автор формулирует и решает разными способами (в основном, в порядке обзора) следующую основную задачу. Выбрать полиномы $R_k(\lambda)$, удовлетворяющие условию (3), так, чтобы при $k \to \infty$ по возможности быстро $R_k(\lambda) \to 0$ для всех λ из (a, b), где a и b — соответственно нижняя и верхняя границы для собственных значений матрицы A, $a > 0$. Искомые формулы автор записывает в виде (РЖМат, 1960, 12160)

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = \frac{1}{q_k}(-r_k + e_{k-1}\Delta x_{k-1}),\ k = 0, 1, 2, \ldots\ (e_{-1} = 0),$$

где в зависимости от выбора коэффициентов q_k и e_{k-1} получается тот или иной градиентный метод. Особо исследуются итерационные методы первой степени ($e_k = 0$). В частности, случай $q_k = q = (a + b)/2$ ($|R_k(\lambda)| \leqslant (b - a)^k/(b + a)^k$) и случай (метод Ричардсона; см. РЖМат, 1954, 5782)

$$q_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m}\ (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$(|R_{km}(\lambda)| \leqslant 2k(\sqrt{b} - \sqrt{a})^{km}/(\sqrt{b} + \sqrt{a})^{km}),$$

а также метод наискорейшего спуска

$$q_k = (r_k, Ar_k)/(r_k, r_k).$$

Из методов второй степени ($e_k \neq 0$) рассмотрены метод Франкела $q_0 = (a + b)/2$, $q_k = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2/4$, $e_{k-1} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2/4$ и метод Фландерса и Шортли

$$q_0 = (a + b)/2,\quad q_k = \frac{b - a\,Ch[(k+1)\omega]}{4\ Ch(k\omega)},$$

$$e_{k-1} = \frac{b - a\,Ch[(k-1)\omega]}{4\ Ch(k\omega)},$$

где $Ch\omega = (b+a)/(b-a)$. В этих случаях скорость сходимости определяется величиной $(\sqrt{b} - \sqrt{a})/(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ (так же, как в случае метода Ричардсона). В качестве метода, не требующего никакой информации относительно собственных значений матрицы A, автор рассматривает метод сопряженных градиентов

$$q_k = (r_k, Ar_k)/(r_k, r_k) - e_{k-1},\quad e_k = q_k(r_{k+1}, r_{k+1})/(r_k, r_k)$$

и его обобщение

$$e_{k-1} = S_{\mu,k}q_{k-1}/S_{\mu,k-1},\ q_k = S_{\mu+1,k}/S_{\mu,k} - e_{k-1},$$

где $S_{\mu,k} = (r_k, A^\mu r_k)$ (случаи $\mu > 1$ на практике неудобны, так как требуют вычисления дополнительных величин $A^2x_k, A^3x_k, \ldots$). В некоторых случаях автор считает целесообразным применять комбинацию метода, использующего полиномы Чебышева (например, метод Фландерса и Шортли) с методом сопряженных градиентов. При этом сначала, по возможности сильно, аннулируются компоненты погрешности, которые соответствуют собственным значениям из $\lambda_m \leqslant \lambda \leqslant b$ (автор называет этот процесс сглаживанием), а затем, исходя из полученного таким образом приближения, при помощи метода сопряженных градиентов, аннулируются остальные компоненты, соответствующие интервалу $a \leqslant \lambda < \lambda_m$. Более подробно автор останавливается на итерационном методе, основанном на преобразовании данной системы (1) к другой системе $\bar{A}x + \bar{b} = 0$, где $\bar{A} = E - R(A)$, $\bar{b} = A^{-1}[E - R(A)]b$ (с тем же решением), матрица $\bar{A}$ которой имеет значительно меньшую меру обусловленности $P(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. Отдельно исследован вопрос вычисления собственных значений матрицы. В частности, здесь рассмотрен так называемый QD-алгоритм автора.

В. К. Саульев

3 В180. Эксперименты по методам градиентов. Ginsburg Th. Experiments on gradient methods. «Mitt. Inst. angew. Math. Eidgenoss. techn. Hochschule Zürich», 1959, № 8, 50—78 (англ.)

Подробно анализируются результаты численной проверки методов градиентов, описанных Рутисхаузером (реф. 3В179). В качестве основного примера выбрана система простейших сеточных уравнений, аппроксимирующая на квадратной сетке бигармоническое уравнение (задача о пластинке квадратной формы). Рассматриваются случаи системы с 70 неизвестными (грубая сетка) и системы с 270 неизвестными (мелкая сетка). В первом случае мера обусловленности $P = (\lambda_{\max}/\lambda_{\min}) \approx 1600$, во втором $P \approx 22\,000$. В качестве второго примера выбрана система сеточных уравнений, соответствующая задача о стержне (матрица системы сеточных уравнений является пятидиагональной), с 44 неизвестными и $P \approx 7 \cdot 10^5$. Системы 70 и 44 порядков решались на электронной вычислительной машине ERMETH, принадлежащей высшей технической школе в Цюрихе, а система 270 порядка просчитана на вычислительной машине ИБМ-704. Все вычисления проводились в режиме с плавающей запятой и с 11 десятичнымч знаками в диапазоне чисел от 10^{-200} до 10^{200} для машины ERMETH и с 8 десятичными знаками в диапазоне чисел от 10^{-38} до 10^{38} для машины ИБМ-704. На указанных выше трех системах линейных алгебраических уравнений проверены следующие градиентные методы: метод наискорейшего спуска, метод, использующий полиномы Чебышева (в форме Фландерса и Шортли), метод сопряженных градиентов, обобщенный метод сопряженных градиентов ($\mu = 1$; реф. 3В179), комбинированный метод (реф. 3В179; первый этап — сглаживание — осуществляется при помощи полиномов Чебышева, второй этап — при помощи метода сопряженных градиентов), метод преобразования данной системы в другую систему, имеющую меньшую меру обусловленности. Результаты приведены в виде многочисленных таблиц и графиков с подробными комментариями. В качестве начального приближения во всех случаях взят вектор $x_0 = 0$. Мера ошибки определяется одной из следующих трех величин $F_{1(k)} = (r_k, r_k)^{1/2} = |r_k|$, $F_{2(k)} = |(r_k, x_k - x)|^{1/2}$, $F_{3(k)} = |x_k - x|$, где $r_k = Ax_k + b$ (x_k — k-я итерация). При этом величина $F_{1(k)}$ используется в случае системы

270 порядка, для которой точное значение решения x неизвестно. В качестве меры скорости сходимости используются величины $f_{i(0,k)} = (F_{i(k)}/F_{i(0)})^{1/k}$ $(i = 1,2,3)$. Верхняя граница b для собственных значений определена на основании теоремы Гершгорина ($b = \max_j \sum_j |a_{ij}|$, где a_{ij} — элементы данной матрицы A). При применении комбинированного метода на первом этапе практически аннулировались все компоненты начальной погрешности, кроме 9—10 компонент, соответствующих наименьшим собственным значениям. Отмечается, что в случае метода сопряженных градиентов невязку r_k практически лучше (теоретически все равно) вычислять по рекуррентным формулам $r_{k+1} = r_k + \Delta r_k$, $\Delta r_k = \frac{1}{q_k}(-Ar_k + e_{k-1}\Delta r_{k-1})$, $\Delta r_{-1} = 0$, чем непосредственно из соотношения $r_k = Ax_k + b$. В этой связи устанавливается также, что метод сопряженных градиентов практически не приводит к точному решению за n (n — число разных собственных значений данной матрицы A) итераций (погрешности округления!). В. К. Саульев

3 В181. Общий метод решения в конечных квадратурах уравнения диффузии неоднородной среды. Philip J. R. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. «Austral. J. Phys.», 1960, **13**, № 1, 2—12 (англ.)

Рассматривается уравнение $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$, при граничных условиях $\theta = 0$, $x > 0$, $t = 0$, $\theta = 1$, $x = 0$, $t > 0$, которое известной подстановкой приводится к выражению для $D(\theta)$: $D(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\theta}\int_0^\theta \varphi d\theta$. Это доказывает, что решение уравнения существует в конечных квадратурах, если $D(\theta)$ представима описанным способом. Приводятся таблицы функций $D(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ для различных предположений относительно $D(\theta)$ и обсуждается практическое использование метода.

А. А. Красилов

3 В182. О численном решении уравнения теплопроводности со смешанными граничными условиями. Lowan Arnold N. On the numerical treatment of heat conduction problems with mixed boundary conditions. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 266—270 (англ.)

Приводится элементарный вывод достаточного условия устойчивости $K\Delta t/(\Delta x)^2 + K\Delta t/(\Delta y)^2 \leqslant 1/2$ системы сеточных уравнений

$$u_{i,j,k+1} = \beta u_{i,j-1,k} + \alpha u_{i-1,j,k} + (1 - 2\alpha - 2\beta)u_{i,j,k} + \alpha u_{i+1,j,k} + \beta_{i,j+1,k} \quad (i = 1,2,\ldots,M; j = 1,2,\ldots,N);$$

$$u_{i,j,0} = f(i\Delta x, j\Delta y);\ u_{0,j,k} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant N);$$

$$u_{i,0,k} = 0 \quad (1 < i < c_1/\Delta x);\ u_{i,N+1,k} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant c_2/\Delta x);$$

$$u_{i,0,k} = u_{i,1,k} + \Delta y\varphi_{1,i,j} \quad (c_1/\Delta x \leqslant h \leqslant a/\Delta x);$$

$$u_{M+1,j,k} = u_{M,j,k} - \Delta x\varphi_{i,j} \quad (1 \leqslant j \leqslant N);$$

$$u_{i,N+1,k} = u_{i,N,k} - \Delta y\varphi_{2,i,j} \quad (c_2/\Delta x \leqslant h \leqslant a/\Delta x),$$

аппроксимирующей задачу

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ t > 0);$$

$$V(x, y, 0) = f(x, y);\ V(0, y, t) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant b);$$

$$V(x, 0, t) = 0 \quad (0 < x < c_1);\ V(x, b, t) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c_2);$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \varphi_1(x, t) \quad (c_1 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0);\ \frac{\partial V}{\partial x} = \varphi(y, t)$$

$$(x = a,\ 0 \leqslant y < b);\ \frac{\partial V}{\partial y} = \varphi_2(x, t) \quad (c_2 \leqslant x < a,\ y = b).$$

Этот вывод основан на том факте, что система $u^{(k+1)} = Au^{(k)} + b^{(k)}$, являющаяся матричной записью вышенаписанной системы сеточных уравнений, устойчива, если максимальная сумма модулей элементов каждой строки матрицы A не превосходит единицы.

В. К. Саульев

3 В183. Численное решение параболических уравнений со свободной границей. Rose Milton E. A method for calculating solutions of parabolic equations with a free boundary. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 249—256 (англ.)

Рассматривается следующая нелинейная задача: Найти функции $e(x, t)$, $q(x, t)$ и $T(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$(\rho e)_t + q_x = 0 \quad (x > 0,\ t > 0), \tag{1}$$

$$q + kT_x = 0 \quad (x > 0,\ t > 0), \tag{2}$$

$$T = \begin{cases} \gamma_1 e & (e < 0), \\ 0 & (0 \leqslant e \leqslant H), \\ \gamma_2(e - H) & (e > H) \end{cases} \tag{3}$$

и начальному и граничному условиям

$$e(x, 0) = e_0(x) \quad (x > 0),\ q(0, t) = g(t) \quad (t > 0), \tag{4}$$

где ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности, H — скрытая теплота рекристаллизации, γ_1 и γ_2 — неотрицательные количества, характеризующие тепловые свойства среды, $e(x, t)$ — внутренняя энергия, $q(x, t)$ — тепловой поток, $T(x, t)$ — температура. Задача (1)—(4) аппроксимируется системой сеточных уравнений

$$e_i^{n+1} = e_i^n - \mu(q_i^n - q_{i-1}^n), \tag{5}$$

$$q_i^n = -\bar{k}(T_{i+1}^n - T_i^n), \tag{6}$$

$$T_i^n = \begin{cases} \gamma_1 e_i^n & (e_i^n < 0), \\ 0 & (0 \leqslant e_i^n \leqslant H), \\ \gamma_2(e_i^n - H) & (e_i^n > H), \end{cases} \tag{7}$$

$$(e_i^0 = e_{0i},\ q_0^n = q^n, \tag{8}$$

где $\mu = \Delta t/\rho\Delta x$, $\bar{k} = k/\Delta x$. Для ее устойчивости и сходимости предполагается достаточным выполнение неравенства $\Delta t/(\Delta x)^2 \leqslant \rho/2k\gamma_2$. Задача (1)—(4) по существу совпадает с задачей Стефана, отличаясь от последней только тем, что в ней явно не фигурирует неизвестная движущаяся (свободная) граница $x = x(t)$. Так как производные решения задачи (1)—(4) на внутренней границе $x = x(t)$ не являются непрерывными, автор вводит в рассмотрение слабое решение задачи (1)—(4): функции e, q и T, удовлетворяющие граничному условию (4) и уравнению (3), называются слабым решением задачи (1)—(4), если для произвольных гладких функций φ и ψ, равных нулю вне некоторой области, справедливы интегральные соотношения

$$\int\int(\varphi_t e + \varphi_x q)\,dxdt + \int\varphi(x, 0)\,e_0(x)\,dx = 0,$$

$$\int\int(q\psi - kT\psi_x)\,dxdt = 0.$$

Высказывается предположение, что это слабое решение существует, что оно единственное и что оно может быть получено как предел последовательности решений системы сеточных уравнений (5)—(8). Приводится интерпретация уравнений (5)—(8) при помощи случайного процесса. В качестве числового примера рассмотрена задача: $e_t + q_x = 0$, $q + T_x = 0$, $T = 0$ $(0 \leqslant e \leqslant 1)$ и $T = e/2$ $(e < 0)$, $e(x, 0) = 1$, $q(0, t) = -1$.

В. К. Саульев

3 В184. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений с частными производными при помощи

решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Albrecht Rudolf F. Approximation to the solution of partial differential-equations by the solutions of ordinary differential equations. «Numer. Math.», 1960, 2, № 4, 245—262 (англ.)

Линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(x,t)\frac{\partial^k V}{\partial t^k} + \sum_{l\ 0}^{n} b_l(x,t)\frac{\partial^l V}{\partial x^l} = f(x,t), \qquad (1)$$

где $a_k(x,t)$, $b_l(x,t)$ и $f(x,t)$ — вещественные и непрерывные функции от x и t в прямоугольнике $\overline{R}(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant b)$, $a_m(x,t)\equiv 1$, $b_n(x,t)\neq 0$ с начальными

$$\frac{\partial^k V(x,0)}{\partial t^k} = V_{(k)}(x),\ k=0,1,\ldots,m-1 \qquad (2)$$

и краевыми

$$\sum_{j=0}^{l_\nu} c_{\nu j}(t)\frac{\partial^j V(0,t)}{\partial x^j} = c_\nu(t),\ \nu=1,2,\ldots,s, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{l_\nu} c_{\nu j}(t)\frac{V(a,t)}{\partial x^j} = c_\nu(t),\ \nu=s+1,s+2,\ldots,n \qquad (4)$$

условиями на равномерной сетке $x_i = ih$ аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$du/dt + Au = F \qquad (5)$$

(метод прямых). Описан общий метод построения системы конечноразностных уравнений (5). Для ограниченного, но важного класса задач (1)—(4) устанавливается в терминах функционального анализа сходимость (в смысле метрики пространства C) и оценивается погрешность решения. Приведено четыре примера на применение общих результатов автора. Так, решая уравнение $\partial V/\partial t = c^2\partial^2 V/\partial x^2 + f$ с простейшими граничными условиями при помощи простейшей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$du_i/dt = c^2(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})/h^2 + f_i,$$

автор получает следующее выражение для погрешности

$$\|V-u\| \leqslant h^2\sqrt{2}\,\|V^{(4)}\|/6(12-\pi^2),$$

где $V^{(4)}$ — четвертая производная от V. В. К. Саульев

3 В185. Об одном построении нижних и верхних функций решения задачи Коши для уравнения в частных производных 2-го порядка гиперболического типа. Артемов Г. А. «Сб. научн. тр. Криворожск. горно-рудн. ин-та», 1959, вып. 7, 301—311.

Для уравнения $u_{xy}=f(x,y,u,p,q)$ при ограничениях, несколько ослабленных сравнительно с предыдущими результатами автора (РЖМат, 1956, 4088; 1957, 7335) построены последовательности, монотонно сходящиеся к решению. Приведена оценка скорости сходимости и пример. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

3 В186. О распространении ошибок округления при численном решении волнового уравнения. Lowan Arnold N. On the propagation of round-off errors in the numerical treatment of the wave equation, «Math. Comput.», 1960, 14, № 71, 223—228 (англ.)

Для численного решения уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\quad (0\leqslant x\leqslant a,\ t>0)$$

с условиями $V(x,0)=f(x)$, $V_t(x,0)=g(x)$, $V(0,t)=V(a,t)=0$ рассматриваются явное

$$u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1} = R^2(u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}) \quad (1)$$

и неявное

$$u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1} = \frac{R^2}{2}(u_{i-1,k+1} - 2u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1} + u_{i-1,k-1} - 2u_{i,k-1} + u_{i+1,k-1}) \quad (2)$$

сеточные уравнения (условие $V_t(x,0)=g(x)$ аппроксимируется простейшим образом $u_{i,1}=u_{i,0}+g_i\Delta t = f_i + g_i\Delta t$), где $R=c\Delta t/\Delta x$, $u_{i,k}=u(i\Delta x, k\Delta t)$, $(m+1)\Delta x=a$. Погрешность $E^{(n)}=\overline{u}^{(n)}-u^{(n)}$, где $u^{(n)}$ — точное решение систем (1) или (2), а $\overline{u}^{(n)}$ — численное решение, удовлетворяет уравнению $E^{(n)}=ME^{(n-1)}+NE^{(n-2)}+\delta^{(n)}$, где M и N — матрицы, соответствующие системе (1) или (2), а $\delta^{(n)}$ — погрешность округления при $t=n\Delta t$ плюс погрешность, возникающая от неточности (в неявном случае (2)) решения системы сеточных уравнений при $t=n\Delta t$. Автор устанавливает неравенство

$$\|E^{(n)}\| \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2}\|\delta\|, \qquad (3)$$

где $\|\delta\|=\max\|\delta^{(k)}\|$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и норма определяется согласно соотношению $\|\varphi\|^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2$. Для случая явного сеточного уравнения (1) $\|\delta\|=\frac{3}{2}10^{-p}$, где p — число десятичных знаков, используемых при вычислении. При доказательстве неравенства (3) предполагается, что корни квадратного уравнения $x^2-\lambda_l x-\mu_l=0$, где λ_l и μ_l — собственные значения соответственно матриц M и N, не превосходят по абсолютному значению единицы. В. К. Саульев

3 В187. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем. Анучина Н. Н., Яненко Н. Н. «Докл. АН СССР», 1959, 128, № 6, 1103—1105

Построена система одномерных неявных разностных схем, аппроксимирующих с точностью до $O(\tau^2+h^2)$ уравнение

$$p_{tt} - \sum_{i=1}^{m} p_{x_i x_i} = 0 \qquad (1)$$

и соответствующую ему в двумерном случае систему линеаризированных уравнений газовой динамики

$$u_t + p_x = 0;\quad v_t + p_y = 0;\quad p_t + u_x + v_y = 0.$$

Система уравнений является спектрально устойчивой при любых шагах и в случае уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{p^{n+1+\frac{s}{m}} - p^{n+1+\frac{s-1}{m}} - p^{n+\frac{s}{m}} + p^{n+\frac{s-1}{m}}}{\tau^2} = \frac{\Delta_1\Delta_{-s}}{h_s^2}\frac{p^{n+1+\frac{s}{m}} + p^{n+1+\frac{s-1}{m}} + p^{n+\frac{s}{m}} + p^{n+\frac{s-1}{m}}}{4};$$

$$s=0,\ldots,m-1,\quad n=1,\ldots$$

Н. С. Бахвалов

3 В188. Решение гиперболических дифференциальных уравнений методом конечных разностей. Fox P. The solution of hyperbolic partial differential equations by difference methods. «Math. methods digital computers.» New York—London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 180—188 (англ.)

Обзорная статья, касающаяся решения задачи Коши и смешанной задачи для гиперболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s=1}^{n} A^s\frac{\partial u}{\partial x^s} + Bu \qquad (1)$$

(u—вектор с m компонентами, x^s и t—независимые переменные, A^s и B—матрицы, зависящие от x, t и u) при

помощи метода сеток. Более подробно рассматриваются явные одношаговые (однослойные) сеточные схемы

$$u(x, t+\Delta t)=\sum\nolimits_p C^p u(x+\Delta_p x, t), \qquad (2)$$

где $\Delta_p x$ — векторы с n компонентами, C^p — матрицы, а p зависит от вида сеточного уравнения. При этом предполагается, что $\Delta_p x/\Delta t = r_p$, $\sum C^p = 1$, $\sum C^p r_p^s = A^s$. Приводятся определения сходимости и устойчивости схемы (2). В частности, схема (2) называется устойчивой, если решения сеточного уравнения являются равномерно ограниченными функциями от начальных данных для всех достаточно малых Δt и всех $n\Delta t$, меньших T. Для случая, когда матрицы C^p в (2) являются постоянными, выводится необходимое и достаточное условие устойчивости Неймана (собственные значения матрицы $\sum C^p e^{ikr_p\Delta t}$ по модулю не превосходят единицы для любых вещественных значений $k\Delta t$). Для случая, когда матрицы C^p в (2) являются переменными, упоминается достаточное условие устойчивости Фридрихса ($\sum C^p = 1$, матрицы C^p симметричны, удовлетворяют условию Липшица и неотрицательны). Подробно исследуется система сеточных уравнений

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\Delta t}=c\,\frac{w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n}{\Delta x},$$
$$\frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\Delta t}=c\,\frac{y_j^{n+1}-y_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}, \qquad (3)$$

аппроксимирующая систему $\partial y/\partial t = c\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial t = c\partial y/\partial x$, представляющую собой частный случай (1). В частности, выводится для этой системы условие устойчивости $c\Delta t/\Delta x \leqslant 1$. Отмечается возможность использования при построении сеточных уравнений аппроксимаций типа $\Delta t\partial w/\partial t \approx w(x, t+\Delta t) - [w(x+\Delta x, t) + w(x-\Delta x, t)]/2$. Рассматриваются также неявные сеточные уравнения. Например, вместо (3), можно использовать уравнения

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\Delta t}=c\,\frac{w_{j+1/2}^n-w_{j-1/2}^n+w_{j+1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^{n+1}}{2\Delta x},$$
$$\frac{w_{j-1/2}^{n+1}-w_{j-1/2}^n}{\Delta t}=c\,\frac{y_j^{n+1}-y_{j-1}^{n+1}+y_j^n-y_{j-1}^n}{2\Delta x},$$

которые являются абсолютно устойчивыми. Для решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений с якобиевыми матрицами описан метод прогонки. Кратко упоминается о многошаговых (многослойных) сеточных уравнениях, о нелинейных гиперболических системах (в частности, об уравнениях газовой динамики), а также о смешанных уравнениях. Библ. 19 назв.

В. К. Саульев

3 В189. Численное решение гиперболических дифференциальных уравнений методом характеристик. Lister Mary. The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics. «Math. methods digital computers». New York—London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 165—179 (англ.)

Система квазилинейных уравнений

$$A_1 u_x + B_1 u_y + C_1 v_x + D_1 v_y + E_1 = 0, \qquad (1)$$
$$A_2 u_x + B_2 u_y + C_2 v_x + D_2 v_y + E_2 = 0 \qquad (2)$$

($A_1, A_2, \ldots E_2$ — известные, достаточно гладкие функции от x, y, u, v; $b^2 - ac > 0$, $a = A_1C_2 - A_2C_1$, $2b = A_1D_2 - A_2D_1$, $c = B_1D_2 - B_2D_1$) сводится к системе характеристических уравнений

$$dy - \xi_+ dx = 0, \quad Fdu + (a\xi_+ - G)dv + (K\xi_+ - H)dx = 0, \qquad (3)$$

$$dy - \xi_- dx = 0, \quad Fdu + (a\xi_- - G)dv + (K\xi_- - H)dx = 0, \qquad (4)$$

где уравнения (3) (соответственно (4)) удовлетворяются на характеристиках C_+ (соответственно C_-),

$$F = A_1B_2 - A_2B_1, \quad G = B_1C_1 - B_2C_1, \quad K = A_1E_2 - A_2E_1,$$
$$H = B_1E_2 - B_2E_1.$$

Для решения системы (3), (4) описан простейший метод характеристик

$$y_P - y_A - (\xi_+)_A (x_P - x_A) = 0,$$
$$F_A(u_P - u_A) + (a\xi_+ - G)_A (v_P - v_A) + (K\xi_+ - H)_A (x_P - x_A) = 0, \qquad (5)$$

и аналогичные формулы для (4), где x_P, y_P, u_P, v_P — являются искомыми величинами, а также более точный метод

$$y_P - y_A + \frac{1}{2}[(\xi_+)_P + (\xi_-)_A](x_P - x_A) = 0,$$
$$\frac{1}{2}(F_A + F_P)(u_P - u_A) + \frac{1}{2}[(a\xi_+ - G)_A + (a\xi_+ - G)_P](v_P - v_A) + \frac{1}{2}[(K\xi_+ - H)_A + (K\xi_+ - H)_P(x_P - x_A)] = 0 \qquad (6)$$

(и аналогичные формулы для (4)), требующий итерационного решения. При этом в качестве начального приближения для (6) рекомендуется использовать решение, полученное при помощи формул (5). Рассмотрен также другой, менее известный чем (5) или (6), метод характеристик, при котором значения искомых функций u и v вычисляются в узлах заранее фиксированной прямоугольной сетки в плоскости x, y. Пусть, например, u и v уже вычислены в соседних узлах A, C и B, находящихся на линии $y = Y$, и требуется вычислить их в узле P, находящемся на линии $y = Y + \Delta y$ над средним узлом C. Пусть, далее, R и S суть точки пересечения соответственно характеристик C_+ и C_-, проходящих через точку P, с прямой $y = Y$. Тогда u_P и v_P могут быть вычислены при помощи формул

$$y_P - y_R = (\xi_+)_C (x_P - x_R),$$
$$u_R = u_C\left[1 - (\xi_+)_C^{-1}\theta\right] + u_A\,\theta\,(\xi_+)_C^{-1},$$
$$v_R = v_C\left[1 - (\xi_+)_C^{-1}\theta\right] + v_A\,\theta\,(\xi_+)_C^{-1}, \qquad (7)$$
$$F_C(u_P - u_R) + (a\xi_+ - G)_C(v_P - v_R) + (K\xi_+ - H)_C(x_P - x_R) = 0 \quad (\theta = \Delta y/\Delta x)$$

и аналогичных для характеристики, проходящей через точки P и S. Вместо этих формул можно использовать более точные «неявные» формулы (аналогичные (6)), которые также приведены. Подробно исследованы случаи просчета по формулам (5)—(7) узлов, находящихся на или вблизи границы. Сравнивая методы типа (5) с методами типа (7), автор отмечает следующие преимущества последних: 1) В случае (7) значения x_P и y_P известны точно (вычисляются только u_P и v_P). 2) Метод (7) позволяет использовать экстраполяцию на «нулевой шаг» (методика этой экстраполяции описана). 3) Метод (7) в случае нестационарных процессов дает решение в более естественной форме, именно распределение искомых величин в пространстве для различных моментов времени. 4) В процессе счета шаги Δx и Δy легко могут быть, в зависимости от поведения вычисляемого решения, увеличены или уменьшены в 2 раза. 5) Метод (7) удобнее с точки зрения программирования.

С другой стороны, характеристические сетки, фигурирующие в методах (5) и (6), часто полезны для физической интерпретации. Приведены два частных случая систем (1), (2) и (3), (4) из области гидродинамики, один из которых решен численно. Приведена блок-схема программы. Библ. 7 назв. В. К. Саульев

3 В190. Численные методы в газовой динамике. Дородницын А. А. «Arch. mech. stosowanej», 1960, 12, № 1, 13—27 (рез. польск., англ.)

Обзор основных направлений в численных методах газовой динамики, для которой характерной особенностью является разрывность решений. На простейшем примере убедительно показывается, как может метод сеток, дающий хорошие результаты в случае гладких решений, привести к совершенно неверным результатам в случае разрывных решений. Причиной этого, поясняет автор, является невыполнение «интегрального закона сохранения» при наличии разрывов. Поэтому аппроксимирующие операторы должны строиться так, чтобы «в предельном случае разрыва они точно отображали интегральные законы сохранения». Другое направление в численных методах решения газодинамических уравнений заключается во введении в данные уравнения «искусственной вязкости». При этом отмечается следующая особенность метода «искусственной вязкости». При введении искусственной вязкости делается два предельных перехода: сначала измельчается сетка при фиксированном коэффициенте вязкости, а затем (после получения ряда решений с различными коэффициентами вязкости) уменьшается коэффициент вязкости. Практически оба эти процесса совершаются одновременно и «коэффициент вязкости выбирается так, чтобы ударная волна «размазывалась» на 5—6 шагов сетки». При этом, так как введение вязкости понижает точность расчета, целесообразно использовать коэффициент вязкости переменным (зависящим от градиента скорости), например, в следующей форме. Если исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F(u)}{\partial x}=0,$$

то возмущенное уравнение можно записать так

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F(u)}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, \qquad (1)$$

где $\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — положительная функция, возрастающая при увеличении градиента скорости $\partial u/\partial x$. Для уменьшения общего числа просчитываемых узлов, целесообразно использовать сеточные уравнения повышенной точности. Однако сходимость этих уравнений будет нарушена в окрестности разрывов. Для избежания этой трудности автор предлагает использовать «схему промежуточной точности»

$$aL^{(1)}(u)+(1-a)L^{(2)}(u)=0, \qquad (2)$$

где $L^{(i)}(u)=0$ $(i=1,2)$ — сеточное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1) с погрешностью $O(h^i)$, а параметр a выбирается следующим образом: «там, где есть «опасность» образования ударных волн, брать его равным или близким к единице и, наоборот, в областях, где решение гладко, брать его малым или равным нулю». Однако применение схемы (2) «существенно усложняет программирование». Более подробно автор останавливается на первом пути решения разрывных задач, при котором удовлетворяются соответствующие интегральные законы сохранения. При этом при построении сеточных уравнений нужно исходить не из уравнений с частными производными (например, $\partial P/\partial x+\partial Q/\partial y=F$), а из интегральных соотношений (например, $\int Pdy-Qdx=\iint Fdxdy$), так как исходные уравнения с частными производными в окрестности разрывов могут терять смысл. Основную идею применения метода сеток к разрывным задачам автор формулирует следующим образом: «Каждый узел сетки необходимо рассматривать как возможную точку разрыва. Связи между величинами на разрыве необходимо принимать в соответствии с интегральными условиями сохранения». Для решения задач газовой динамики кратко рассматривается также предложенный ранее (РЖМат, 1956, 9104) автором метод интегральных соотношений. Сущность этого метода заключается в сведении исходных уравнений газовой динамики (представленных в дивергентной форме) сначала к системе интегральных соотношений, а затем при помощи соответствующих интерполяционных формул — к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Отмечается, что метод интегральных соотношений без какого-либо затруднения применим в случае неизвестных границ, что важно в задачах газовой динамики, где форма ударных волн заранее неизвестна. Приводится краткий анализ просчитанных этим методом задачи обтекания тела потоком со скоростью точно равной скорости звука и задачи о сверхзвуковом обтекании тела с отошедшей ударной волной. В частности, анализируется фактическая скорость сходимости метода интегральных соотношений. При этом «уже во 2-м приближении, в котором вся область подразделяется лишь на две полосы, расчет получается достаточно точным». Останавливаясь совсем кратко на классическом методе характеристик, автор замечает, что этот метод встречает известные трудности «в окрестности звуковой линии и при построении головной присоединенной ударной волны» (эту трудность рекомендуется преодолевать при помощи рядов). Важнейшей задачей в области численных методов газовой динамики автор считает разработку эффективных методов решения трехмерных задач (пространственных стационарных течений и нестационарных двумерных). Библ. 8 назв. В. К. Саульев

3 В191. Процесс итерации в нелинейных уравнениях. Чэнь Вэнь-юань, Дин Чуань-сун. «Ланьчжоу дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Уч. зап. Ланьчжоуск. ун-та (сер. естеств. н.), Lanchow Univ. J. (Nature Sci.)», 1958, № 2, 33—45 (кит.; рез. русск.)

Для решения нелинейного уравнения $P(x)=0$, где P — оператор, действующий из одного банахова пространства в другое, предлагается обобщенный метод Ньютона:

$$x_{n+1}=x_n-\left[f_n'(x_n)\right]^{-1}\Gamma_nP(x_n),\quad \text{где } \Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1},$$

$$f_n(x)=\left[I-\sum_1^m\frac{T_i^{(n)}}{(i+1)!}(x-x_n)^i\right]\Gamma_nP(x),\ \text{причем } T_i^{(n)}$$

определяются из условий

$$f_n''(x_n)=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_n^{(m+1)}(x_n)=0.$$

В частности, при $m=1$ получается метод Салехова. Полученные Л. В. Канторовичем (РЖМат, 1958, 3913) достаточные условия сходимости метода Ньютона при наличии мажорирующего уравнения распространяются на обобщенный метод. Доказательство дано для $m=1$ и $m=2$. В. Л. Загускин

3 В192. К решению систем линейных уравнений. Hennecke F. Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. «Vermessungstechnik», 1960, 8, № 3, 66—70 (нем.; рез. русск., англ.)

Описывается алгоритм Гаусса и его видоизменения — «механизированный алгоритм» и «модернизированный алгоритм». В механизированном алгоритме на k-м этапе преобразуется только одно $k+1$-е уравнение, причем из него исключается сразу k неизвестных. Модернизиро-

ванный алгоритм состоит в разложении матрицы системы в произведение двух треугольных матриц. Рассматривается также решение системы уравнений путем обращения матрицы. Этот способ рекомендуется в случае, когда свободные члены системы являются переменными. В. Л. Загускин

3 В193. Решение совместных линейных уравнений. Wendt Arnold. Solving simultaneous linear equations. «Math. Teacher», 1960, **53**, № 1, 12—17 (англ.)

Общедоступное изложение метода исключения, основанное на использовании элементарных преобразований и не предполагающее знакомства с определителями. В. Л. Загускин

3 В194. Об интерпретации алгоритма Холецкого в статике упругих систем. Caironi Mario. Su una interpretazione dell'algoritmo di Cholesky nella statica dei sistemi elastici. «Riv. ingegneria», 1960, **10**, № 3, 247—252 (итал.)

Описывается метод Холецкого применительно к системам линейных алгебраических уравнений, возникающих в теории упругости, и дается физическая интерпретация некоторых участвующих в решении величин. В. Л. Загускин

3 В195. Замечание об унитарном приведении несимметричной матрицы к треугольному виду. Morrison David D. Remarks on the unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 2, 185—186 (англ.)

Предлагается видоизменение метода Хаусхолдера (РЖМат, 1960, 6998). Благодаря этому метод становится пригодным для матриц с комплексными элементами. Кроме того, в одной из формул выражение $\alpha - r$ заменяется на $\alpha + r$, что для вещественных матриц (в этом случае α и r положительны) дает меньшую потерю точности. В. Л. Загускин

3 В196. Решение линейных уравнений методом сопряженных градиентов. Beckman F. S. The solution of linear equations by the conjugate gradient method. «Math. methods digital computers». New York—London, John Wiley & Sons, Inc, 1960, 62—72 (англ.)

Для решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, где A — симметричная положительно определенная матрица N-го порядка, применяется следующий итерационный метод (метод сопряженных градиентов): 1) выбирают произвольный вектор x_0 (начальная аппроксимация к решению); 2) полагают $p_0 = r_0 = b - Ax_0$; 3) определяют последовательно

$$\alpha_i = (p_i, r_i)/(p_i, Ap_i),\ x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i,\ r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i,$$
$$\beta_i = -(r_{i+1}, Ap_i)/(p_i, Ap_i),\ p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i;$$

4) повторяют шаг 3), используя $i+1$ вместо i, и продолжают процесс до $i = N-1$ или до тех пор, пока невязка r_i не станет достаточно малой. Метод сопряженных градиентов, как отмечает автор, прост с вычислительной точки зрения, сохраняет первоначальный вид матрицы A в процессе вычисления (что очень важно в тех случаях, когда матрица A имеет много нулевых элементов), требует сравнительно небольшое число запоминающих ячеек счетной машины, позволяет начинать вычисления с произвольного приближения, причем каждое новое приближение x_{i+1} лучше предыдущего x_i, приводит (теоретически) к точному ответу самое большее за N шагов. В качестве недостатка (довольно существенного) метода сопряженных градиентов отмечается его неустойчивость по отношению к погрешностям округлений. Для случая полных матриц метод сопряженных градиентов по числу арифметических действий (он требует $\approx N^3 + 5N^2$ умножений или делений и $\approx N^3 + 6N^2$ сложений или вычитаний) значительно уступает методу исключения. Описано обобщение метода сопряженных градиентов — метод сопряженных направлений: если $\{p_i\}$ — «A-сопряженная» или «A-ортогональная» ($(Ap_i, p_j) = 0$, если $i \neq j$ и $(Ap_i, p_i) \neq 0$) система N векторов, то $x = \sum_{i=0}^{N-1} c_i p_i$, где $c_i = (b, p_i)/(Ap_i, p_i)$, а x — решение данной системы $Ax = b$. При этом рассмотрен процесс ортогонализации Грама — Шмидта для получения A-сопряженной системы N векторов из данной произвольной линейно независимой системы N векторов. Исследовано обобщение метода сопряженных градиентов на случай матрицы с произвольными элементами. Проведен анализ ошибок метода (в этой связи, в частности, отмечается желательность использования машин, работающих в режиме плавающей запятой). Рассмотрена геометрическая интерпретация метода. Приведена блок-схема программы. Общее время, затрачиваемое машиной на N шагов, оценивается при помощи формулы $T \approx 2(N^3 + 5N^2)\mu + 2(N^3 + 6N^2)\nu$, где μ и ν — соответственно время умножения и время деления. В. К. Саульев

3 В197. Системы линейных уравнений в самосопряженной форме. Lanczos C. Linear systems in self-adjoint form. «Amer. Math. Monthly», 1958, **65**, № 9, 665—679 (англ.)

Пусть A — произвольная прямоугольная матрица. Рассмотрим задачу отыскания чисел λ_i и пар векторов x_i, y_i, удовлетворяющих системе

$$Ay_i = \lambda_i x_i,\ A^* x_i = \lambda_i y_i\ (\lambda_i > 0). \qquad (1)$$

Если матрица AA^* имеет r положительных собственных чисел λ_i^2 (r — ранг A), то все решения системы (1) можно получить, извлекая из них положительные корни λ_i и беря соответствующие собственные векторы x_i матрицы AA^*; при этом y_i будут собственными векторами матрицы A^*A ($\| x_i \| = \| y_i \| = 1$). Матрица A представима в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i y_i^T, \qquad (2)$$

где x_i — матрица-столбец, а y_i^T — матрица-строка. R_A (множество значений оператора A) есть линейная оболочка $\{x_i\}_{i=1}^r$, R_{A^*} — линейная оболочка $\{y_i\}_{i=1}^r$. Решение уравнения $Ay = b$ ($b \in R_A$), лежащее в R_{A^*}, определяется однозначно по формуле

$$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} y_i (b, x_i), \qquad (3)$$

а общее решение дается суммой $y + z$, где $z \perp R_{A^*}$ произволен. Формулой (3) задается обобщенный обратный оператор G ($y = Gb$) такой, что $GA = P$, $AG = Q$, P — ортогональный проектор на R_{A^*}, Q — ортогональный проектор на R_A. Оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между R_A и R_{A^*}. Отмечается возможность обобщения полученных результатов на функциональные пространства, сходимость в общем случае разложений типа (2) (в чем состоит одно из их преимуществ перед другими билинейными разложениями). М. Л. Бродский

3 В198. Об одном способе одновременного вычисления двух границ спектра. Пугачев Б. П., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 52—70

Ранее (РЖМат, 1957, 5181) автором были сообщены результаты исследования двух методов приближенного вычисления собственных значений, предложенных М. А. Красносельским (РЖМат, 1957, 1841). Подробно излагаются результаты относительно второго метода. (По поводу первого метода см. Тр. Семинара по функцион. анализу Воронежского ун-та, 1957, вып. 5. 52—70). М. Ш. Бирман

3 В199. Вычисление комплексных корней алгебраических уравнений как дополнение к методу Греффе. Fritscher O. Berechnung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen als Ergänzung der Methode von Graeffe. «Österr. Ingr-Arch.», 1960, **14**, № 1, 68—75 (нем.)

Предлагаются два метода для определения аргументов комплексных корней, модули которых вычислены по методу Греффе. Первый метод применяется в случае, когда заданное уравнение $f(x)=0$ степени n имеет вещественные коэффициенты. После определения модулей корней по методу Греффе следует исключить вещественные корни. Пусть r — наибольший или наименьший из модулей оставшихся корней. Производя замену $x=ru$, получим уравнение $g(u)=0$. Обозначим через $\overline{g}(u)$ многочлен, полученный из $g(u)$ обращением порядка следования коэффициентов, и построим многочлены $g_1(u)=g(u)+\overline{g}(u)$, $g_2(u)=g(u)-\overline{g}(u)$. Разделив каждый из них на те из двучленов $u+1$, $u-1$, на которые они делятся (это зависит от четности их степеней), получим два возвратных многочлена. Произведем замену аргумента $v=u+1/u$. Задача свелась теперь к нахождению общих действительных корней двух многочленов степени не выше $n/2$. Второй метод представляет собой один из вариантов использования инверсии для перевода искомых корней на действительную ось. Имеется также замечание об ошибках округления в методе Греффе. Приводятся числовые примеры. В. Л. Загускин

3 В200. Приближенное вычисление полиномов. Lima Gumercindo. Valor numérico de polinômios. «Matemática», 1959, **4**, № 11, 37—40 (порт.)

Описывается схема Горнера и графический метод для вычисления значения многочлена. В. Л. Загускин

3 В201. Новый метод вычисления многочленов и их корней. Glenisson Y., Derwidué L. Une nouvelle méthode de calcul des polynomes et de leurs zeros. «Pubsl Assoc. ingrs Fac. polytechn. Mons», 1959, № 4, 1—8 (франц.)

Алгебраическое уравнение $P(z)=0$ записывается в форме

$$z^n = A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n \qquad (1)$$

и умножается на z, после чего z^n заменяется правой частью уравнения (1). После p таких преобразований получается уравнение $z^{n+p}=\Phi_p(z)$, где $\Phi_p(z)$ — многочлен степени $n-1$. При этом общий наибольший делитель $Q(z)$ многочленов $P(z)$ и $\Phi_p(z)$ имеет, вообще говоря, при достаточно большом p ненулевую степень (этот делитель содержит некоторое количество наименьших по модулю корней $P(z)$). Это дает возможность создать процесс для разложения многочлена $P(z)$ на множители. Рассматриваются также некоторые вопросы, связанные с вычислением многочленов, в частности, разложение частного двух многочленов по отрицательным степеням аргумента. Имеются числовые примеры. Следует отметить связь излагаемого метода с методом Бернулли. В. Л. Загускин

3 В202. Трансцендентное уравнение для уравнения Шредингера. Radok J. R. M. Transcendental equation for the Schrödinger equation, «Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 276—278 (англ.)

Приведены с тремя значащими цифрами (полученные графически) первые несколько корней трансцендентного уравнения

$$\eta_\lambda^{(1)}\left(i-\sqrt{k^2-\varepsilon^2}\right)+\eta_\lambda(\varepsilon)=0.$$

3 В203. Применение метода интерполирования с поправками к приближенному синтезу механизмов. Безбородников М. Ф. «Тр. Ин-та машиновед. АН СССР. «Семинар по теории машин и механизмов», 1959, **20**, № 77, 11—26

Рассматривается приближенный аналитический метод синтеза механизмов (метод интерполирования с поправками), обобщающий известный метод поправок Чебышева и состоящий в том, что в первоначально грубо найденные размеры звеньев механизма вносятся поправки, улучшающие точность хода проектируемого механизма. Подробно описаны четыре способа внесения поправок в коэффициенты интерполяционного полинома и дана оценка точности приближения. Указывается, что изложенный метод применим и тогда, когда функция, которая должна быть воспроизведена механизмом, задана графически или таблично. Для иллюстрации изложенного дается решение задачи о параллелограмме Уатта, поставленной Чебышевым, различными методами интерполирования с поправками, и полученные результаты сравниваются. И. Ф. Шелихова

3 В204. Кубическая интерполяция по формуле Ньютона с разделенными разностями. Чайковская Э. Н. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 30—32

Описана составленная для универсальной цифровой вычислительной машины БЭСМ программа вычисления интерполяционного полинома с первыми тремя разделенными разностями. Полином аппроксимирует функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)[x_0x_1]+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)[x_0x_1x_2]+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0x_1x_2x_3],$$

где

$$[x_0x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1},\quad [x_0x_1x_2]=\frac{[x_0x_1]-[x_1x_2]}{x_0-x_2},$$

$$[x_0x_1x_2x_3]=\frac{[x_0x_1x_2]-[x_1x_2x_3]}{x_0-x_3}.$$

Вся программа содержит 66 трехадресных команд. По этой программе можно вычислять один за другим интерполяционные полиномы для произвольного числа различных функций $f(x)$. Для каждой из этих функций в качестве начальных данных задаются ее значения в четырех точках: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$. В. А. Брик

3 В205. Определение чебышевского приближающего полинома для дифференцируемой функции. Murnaghan F. D., Wrench J. W., Jr. The determination of the Chebyshev approximating polynomial for a differentiable function. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, **13**, № 67, 185—193 (англ.)

Пусть $f(x)$ — функция, дважды дифференцируемая в сегменте $[-1, 1]$ и такая, что разность $f'(x)-P'(x)$ для любого полинома $P(x)$ степени не выше n имеет не более n различных нулей. Второй метод Ремеза построения последовательности полиномов $\{P_n^{(m)}(x)\}$, сходящейся к полиному наилучшего приближения для функции $f(x)$, авторы предлагают видоизменить следующим образом: $P_n^{(0)}(x)$ — n-я сумма разложения $f(x)$ в ряд по полиномам Чебышева; $x_k^{(1)}=-\cos k\pi/(n+1)$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$; полином $P_n^{(m)}(x)$ определяется из уравнений

$$f(x_k^{(m)})-P_n^{(m)}(x_k^{(m)})=(-1)^k E^{(m)} \quad (k=0, 1, \ldots, n+1);$$

для $m>0$:

$$x_0^{(m+1)}=-1;\ x_{n+1}^{(m+1)}=1,\ x_k^{(m+1)}=x_k^{(m)}-$$
$$-R_m(x_k^{(m)})/R'_{m-1}(x_k^{(m)})$$

$(k=1, 2, \ldots, n;\ R_{m-1}=f-P_n^{(m-1)};\ R_m=f-P_n^{(m)})$.

Приведено 5 числовых примеров; сходимость метода не доказана. S. Paszkowski

3 В206. Ортогональные многочлены от нескольких переменных. Weisfeld Morris. Orthogonal polynomials in several variables. «Numer. Math.», 1959, **1**, № 1, 38—40 (англ.)

Пусть D — множество в n-мерном евклидовом пространстве, несущее меру μ, по которой интегралы от всех алгебраических многочленов конечны; скалярное произведение $(f, g) = \int_D fgd\mu$. Строится ортогональная система многочленов на D ортогонализацией множества всех одночленов $\psi_j = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ (j_k — целые, $j_k \geqslant 0$). Каждый одночлен ψ_j характеризуется набором степеней $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$; обозначим $\sigma(j) = \sum_{k=1}^{n} j_k$. Одночлены упорядочиваются так, что $g < j$, если $\sigma(g) < \sigma(j)$; если $\sigma(j) = \text{const}$, то упорядочиваем по лексикографическому правилу («с конца»). Тогда система ортогональных полиномов строится по формуле $\psi_j = x_k \psi_{\hat{j}} - \sum_g (x_k \psi_{\hat{j}}, \psi_g)(\psi_g, \psi_g)^{-1} \psi_g$, где $\hat{j}$ получена из j вычитанием единицы из самой правой (k-й) отличной от нуля компоненты j; суммировать достаточно лишь по тем $g < j$, для которых $\sigma(g) \geqslant \sigma(j) - 2$. Если $D = D_1 \times D_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, то ортогональная система на D — совокупность попарных произведений многочленов ортогональных систем на D_1 и D_2. М. Л. Бродский

3 В207. О рациональном приближении. Floyd Robert W. A note on rational approximation. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 69, 72—73 (англ.)

Пусть $f(x)$ — аналитическая функция, а $p(x)$ — многочлен достаточно высокой степени (например, частичная сумма ряда Тейлора или Маклорена) такой, что $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Применяя алгоритм последовательного деления для многочленов

$$\begin{aligned} p(x) &= q_0(x) \cdot T_{n+1}(x) + r_0(x) \\ T_{n+1}(x) &= q_1(x) \cdot r_0(x) + r_1(x) \\ r_0(x) &= q_2(x) \cdot r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x) \cdot r_2(x) + r_3(x) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

где $T_{n+1}(x)$ — $(n+1)$-й многочлен Чебышева, а степени r_i образуют строго убывающую последовательность, автор приходит к равенству

$$r_i(x) = a_i(x) \cdot p(x) + b_i(x) \cdot T_{n+1}(x),$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-2} - q_i \cdot a_{i-1}, \quad a_{-1} = 0, \quad a_{-2} = 1, \\ b_i &= b_{i-2} - q_i \cdot b_{i-1}, \quad b_{-1} = 1, \quad b_{-2} = 0; \end{aligned}$$

при этом сумма степеней $a_i(x)$ и $r_i(x)$ не выше n и

$$p(x) = \frac{r_i(x)}{a_i(x)} - \frac{b_i(x)}{a_i(x)} \cdot T_{n+1}(x).$$

Так как на отрезке приближения $|T_{n+1}(x)| \leqslant 1$, то $b_i(x)/a_i(x)$ служит границей погрешности рационального приближения $r_i(x)/a_i(x)$ к $p(x)$. В частном случае $i = 0$, $a_i = 1$ и $r_0(x)$ — полиномиальное приближение к $f(x)$ степени не выше n. Рассмотрен пример.

Д. Б. Тополянский

3 В208. Численное интегрирование некоторых интегралов в задачах о водяных волнах. Дзиннака. «Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ.», 1960, **32**, № 4, 275—281 (японск.)

3 В209. О вычислении некоторых комплексных эллиптических интегралов. Lang H. A., Stevens D. F. On the evaluation of certain complex elliptic integrals. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 70, 195—199 (англ.)

Неполные эллиптические интегралы третьего рода иногда встречаются в виде

$$a \cdot \Pi(\varphi, \alpha^2, k) + \bar{a} \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2, k) \qquad (1)$$

или

$$a \cdot \Pi(\varphi, \alpha^2, k) - \bar{a} \cdot \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2, k), \qquad (2)$$

где a, $\bar{a}$ и α^2, $\bar{\alpha}^2$ являются комплексно-сопряженными, а модуль k действителен и удовлетворяет неравенствам $0 < k^2 < 1$. В данной работе описывается элементарный прием сведения подобных выражений (1), (2) к виду, удобному для вычислений, т. е. к виду с действительными параметрами и коэффициентами. После некоторых преобразований выражения (1), (2) приводятся к виду

$$a \cdot \Pi(\varphi, \alpha^2) + \bar{a} \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2) = 2a_1 \Pi_1 - 2b_1 \Pi_2,$$

$$a \cdot \Pi(\varphi, \alpha^2) - \bar{a} \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2) = 2ia_1 \Pi_2 + 2ib_1 \Pi_1,$$

где интегралы

$$\Pi_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Pi(\varphi, \alpha^2) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2)$$

и

$$\Pi_2 = \left(\frac{-i}{2}\right) \Pi(\varphi, \alpha^2) + \left(\frac{+i}{2}\right) \Pi(\varphi, \bar{\alpha}^2)$$

определяются из соотношений

$$s_1 \Pi_1 + t_1 \cdot \Pi_2 = -\frac{1}{m_1} F(\varphi) - n_1 \Pi\left(\varphi, \alpha_1^2\right) + \tau_1 \qquad (3)$$

$$s_2 \Pi_1 + t_2 \Pi_2 = -\frac{1}{m_2} F(\varphi) - n_2 \Pi\left(\varphi, \alpha_2^2\right) + \tau_2, \qquad (4)$$

$$\tau_i = \int_0^{p_i} \frac{dx}{1 + h_i x^2}, \quad p_2 = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{(1 + m_i \sin^2\varphi)\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

а коэффициенты и параметры — действительные числа. Дается вывод зависимостей действительных коэффициентов и параметров соотношений (3), (4) от величин m_1 и m_2, являющихся вещественными корнями квадратного уравнения

$$(r^2 + 2k^2\gamma_1 + k^2) m^2 + 2(1 - k^2) r^2 \cdot m - r^2 (r^2 + 2\gamma_1 + k^2) = 0.$$

Указаны также найденные авторами ошибки в соответствующих формулах в книгах Byrd Paul F., Friedman Morris D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Berlin, 1954; Hoüel G. J., Recueil de Formules et de Tables Numériques, Paris, 1901. Приводятся возможные случаи упрощения некоторых из рассматриваемых формул. В. М. Беляков

3 В210. Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций класса S_p. Соболь И. М. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 5, 1041—1044

Методом разложения функций в ряды Хаара исследуется норма погрешности квадратурных формул с равными весами. Автор утверждает, что построенные им ранее квадратурные формулы для вычисления двукратных интегралов являются наилучшими для класса функций S_1. Н. С. Бахвалов

3 В211. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов. Коробов Н. М. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 5, 1009—1012

Рассматривается класс E_s^α функций

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1 \dots m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) \times$$

$$\times \exp\left(2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)\right)$$

таких, что $C(m_1,\ldots,m_s) = O((m_1\ldots\overline{m_s})^{-\alpha})$; здесь $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Предлагаются более экономные, чем предложенные автором ранее, способы отыскания наборов чисел $p, a_1,\ldots,a_s$ таких, что при $f \in E_s^\alpha$ справедливо

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{ka_1}{p},\ldots,\frac{ka_s}{p}\right) = O(\ln^3 p \cdot p^{-\alpha})$$

(в работе вместо $p^{-\alpha}$ ошибочно указано p^{α}). Автор исследует теоретико-числовые свойства чисел $p, a_1,\ldots,a_s$ и, в частности доказывает: При $s \geqslant 2$ и достаточно больших простых p можно указать не менее чем $2^{1-s}p$ целых $a(p)$ таких, что неполные частные чисел $\left\{\frac{a^k}{p}\right\}$ $(k = 1,\ldots,s-1)$ ограничены соответственно величинами $2(5\ln p)^k$. Н. С. Бахвалов

3 В212. Исследование пространственной устойчивости круговой двутавровой арки ступенчато-переменного сечения. Мулин С. М. «Сб. научн. тр. Томский электромехан. ин-т инж. ж.-д. трансп.», 1959, 28, 162—171

К задаче о пространственной устойчивости круговой двутавровой арки, нагруженной радиальной нагрузкой (рассмотрена симметричная двухшарнирная арка, шарнирные закрепления которой допускают свободный поворот опорных сечений при изгибе из плоскости арки), применяется матричный метод упругих грузов А. Ф. Смирнова. В качестве примера исследована устойчивость арки ступенчато-переменного сечения. При этом показано, что учет переменности сечения не вызывает особого увеличения вычислительной работы. С целью оценки точности метода рассмотрен случай арки постоянного сечения. Указывается, что полученный методом упругих грузов результат отличается от точного на 2,6% для матриц второго порядка, а для матриц более высокого порядка расхождение еще меньше.

И. Ф. Шелихова

3 В213. Практические методы расчета на устойчивость рам и пилонов. Савинов О. Н. «Научн. докл. высш. школы. Строительство», 1959, № 2, 71—78

Излагаются вопросы, связанные с упругой устойчивостью многоэтажных рам и пилонов призматической и пирамидальной формы регулярного построения, подверженных действию вертикальной нагрузки, при которой возможны случаи несимметричных форм общей потери устойчивости. Определение критических нагрузок для указанных систем проводится методом деформаций в соединении со способом распределения моментов защемления. При этом используется линейная теория изгиба. При исследовании пилонов с вертикальными стойками способ последовательных приближений комбинируется со способом распределения узловых моментов. Чтобы избежать решения трансцендентного уравнения, к которому приводит определение критической нагрузки из условия равенства нулю определителя системы канонических уравнений метода деформаций, задача решается методом последовательных приближений, причем в первом приближении не учитывается дополнительное влияние продольных сил на искривление стрингеров. Способ распределения узловых моментов используется при составлении уравнения устойчивости для исключения углов поворота. В качестве примера найдена критическая сила для трехпролетного пилона. Получено более простое приближенное решение для рамы по формуле Н. И. Безухова. При этом разница между значением критической силы, подсчитанной по указанной формуле, и значением критической силы, найденной методом последовательных приближений, составляет 1,6%. Проведено исследование формы потери устойчивости, связанной с кручением. И. Ф. Шелихова

3 В214. Точность электрических цепей с электронными лампами, работающими в условиях большого сигнала. Быховский М. Л. «Тр. Ин-та машиноведения АН СССР. Семинар по точности в машиностр. и приборостр.», 1959, вып. 13, 53—63

Рассмотрены вопросы точности электрических цепей, включающих в себя многополюсные нелинейные элементы. Для ошибки выходного напряжения цепи, получающейся вследствие погрешностей в линейных элементах, выведено выражение вида

$$\Delta u_{cd}(t) = \sum T_i(t)\,\Delta q_i$$

(T_i — коэффициент влияния; Δq_i — дополнительный малый параметр). Указывается, что применение к полученным формулам известных соотношений теории вероятностей позволяет проводить вероятностные расчеты точности цепей (например, определять вероятностные характеристики, ошибки выходного напряжения, критерии точности, взаимозаменяемости и т. д.). Показано, что ошибка выходного напряжения цепи, получающаяся вследствие погрешностей в характеристиках ламп, есть некоторая дополнительная функция расчетных напряжений и в общем случае является случайной функцией нескольких переменных. В качестве примера рассмотрен каскад усилителя с анодной нагрузкой в виде сопротивления. Приводятся графики. И. Ф. Шелихова

3 В215. Рациональное научно-методическое обоснование трех современных способов приближенного интегрирования уравнений теории автоматического регулирования. Каялов Г. М. «Изв. высш. учебн. заведений. «Электромеханика», 1959, № 3, 140—143

Указываются существенно более простые и ясные по сравнению с принятыми в литературе и учебных руководствах пути обоснования исходных формул для трех методов приближенного интегрирования уравнений динамических систем. Предложен строгий вывод исходной формулы

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty P(\omega)\,\frac{\sin \omega t}{\omega}\,d\omega$$

($P(\omega)$ — вещественная частотная характеристика) частотного метода трапециевидных характеристик, причем за основу при выводе принята формула Дирихле.

И. Ф. Шелихова

3 В216. О приближенном вычислении некоторых траекторий лунных ракет. Kooy J. M. J., Berghuis J. On the numerical computation of free trajectories of a lunar space vehicle. «Astronaut. acta», 1960, 6, № 2-3, 115—143 (англ.; рез. нем., франц.)

3 В217. Расчет на прочность жестких покрытий на двухслойном основании. Коган Б. И., Хрусталев А. Ф., «Изв. высш. учебн. заведений. Стр-во и архитект.», 1959, № 6, 102—111

Излагается расчетная схема жесткого покрытия, представляющая собой трехслойную систему, состоящую из тонкой плиты, упругого слоя и однородного упругого полупространства. Интенсивность нагрузки представляется при помощи интеграла Фурье — Бесселя. Показано, что на основании полученных результатов можно решить задачу о наращивании плит. Приводятся графики значений интеграла

$$\chi = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{uJ_1(\beta u)\,(M - 4\pi u e^{-2au} - Le^{-4au})}{M(1+u^2)(1+ML+4\pi^2u^2-au^4)\,e^{2au}+L(1-u^2)e^{-4au}}\,du,$$

входящего в выражение для изгибающих моментов плит, с помощью которых можно производить конкретные расчеты плит на двухслойном основании, а также решать задачи о наращивании. Применение графиков показано на примерах определения максимального растягивающего напряжения в цементно-бетонной плите и максимальных растягивающих напряжений для составной плиты. И. Ф. Шелихова

3 В218. Расчет балок с различными моментами инерции с помощью матричного исчисления. Дискуссия. Clough R. W., Fenves S. J., Discussion: Matrix solution of beams with variable moments of inertia by Ming L. Pei. «J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1960, **86**, № 1, 129—135 (англ.)

Обсуждается возможность более широкого применения матричного метода расчета опирающихся нагруженных балок, чем это было сделано автором метода. Высказываются два возражения. Для обобщения метода необходимы дополнительные преобразования матриц, входящих в метод. Использование вычислительной машины может быть затруднительным, если для повышения точности результатов увеличить порядок матрицы моментов коэффициентов влияния. А. А. Красилов

3 В219. Представление числовых функций посредством смещений данной функции. Arsac Jacques. Représentation de fonctions numériques au moyen de translatées d'une fonction donnée. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 2, 278—280 (франц.)

Известно, что при определенных условиях можно приблизить числовую функцию f с помощью линейных комбинаций функций, образованных смещениями данной функции g (эталона). С функцией f сочетают ряд

$$f(x) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p\lambda)\, g\left(\frac{x}{\lambda} - p\right),$$

где λ — данное положительное число. Пусть y — действительная функция от x, ограниченная на $(-X, +X)$, Y — ее преобразование Фурье $Y(u) = \int_{-X}^{+X} y(x) e^{2\pi i u x}\, dx$. Пусть M — целое число, удовлетворяющее условию $X - \frac{1}{2} \leqslant M < X + \frac{1}{2}$, E — множество целых p таких, что $|p| \leqslant M$, φ_p — действительная функция с периодом 1, равная y на $\left[p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right]$. Используется лемма: Пусть $s_n(\varphi_p, p)$ — значение в точке p суммы Фурье ранга n функции φ_p. Если для каждого $p \in E$ имеет место $\lim_{n\to\infty} s_n(\varphi_p, p) = \frac{1}{2}[y(p-0) + y(p+0)]$, то также имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} Y(q) = \sum_{-M}^{+M} \frac{1}{2}[y(p-0) + y(p+0)]$$

(это условие реализуется, в частности, если для каждого $p \in E$, y допускает первую производную, ограниченную справа и слева). С помощью этой и аналогичной для суммы Фейера леммы доказывается теорема: Пусть 1) f — числовая функция, определенная на R, бесконечно дифференцируемая, для которой существует такое целое положительное число r, что $|f(x)| = o(|x|^r)$ для $|x| \to \infty$; кроме того, f — преобразование Фурье некоторой функции на $[-a, a]$; 2) g — числовая функция, для которой существует число $\beta > 0$ такое, что $g(x) = o(|x|^{-r-\beta-1})$ для $x \to \infty$; кроме того, g — преобразование Фурье ограниченной функции $G(u)$ на $[-b, b]$, $\left(b \geqslant \frac{1}{2}\right)$, причем $G(u) = 1$ для $|u| \leqslant 1 - b$. При этих условиях, если $\lambda = (1-b)/a$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n} \left(1 - \frac{|p|}{n+1}\right) f(p\lambda)\, g\left(\frac{x}{\lambda} - p\right).$$

Рассмотрено три примера. Д. Б. Тополянский

3 В220. Пересечение прямой линии со спиралью. Hickerson T. F. Intersection of straight line with spiral. «J. Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1960, **86**, № 1, Part 1, 61—66 (англ.)

Используя известные соотношения и разложения функций в ряд Тейлора, строятся формулы для вычисления пересечений прямых с концентрическими спиральными линиями, необходимые при проектировании мостовых конструкций. Указывается на возможность повышения точности результатов при использовании вычислительных машин. Приводится пример с контролем точности результатов вычислений. А. А. Красилов

3 В221. Метод получения предельных значений некоторых медленно сходящихся последовательностей. Индзима. «Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab.», 1960, **24**, № 3, 203—210, 238—239 (японск.; рез. англ.)

Рассматривается аналитическая функция $f(x) = a + w(x)\, h(x)$, где a — постоянная, $h(x)$ — регулярная в окрестности $x = 0$ функция, $h(0) \neq 0$, $w(x)$ — регулярная в окрестности $x = 0$ функция, за исключением начала, и $\lim_{x\to 0} w(x) = 0$. Автор экстраполирует значение функции в начале $f(0) = a$ на основе известных значений $f(x)$ в точках $x = x_1, x_2, \ldots, x_N$ при предположении, что функция $w(x)$ известна.

3 В222. Точность задачи Ганзена. Атанасов Стефан Н. Точност на Ханзеновата задача. «Годишник Инж.-строит. ин-т. фак. строит., архитект. и хидротехн.», 1959, **11**, № 1, 155—160 (болг.; рез. русск.)

Дается строгий вывод формул для определения средних квадратических ошибок M_P и M_Q в положении пунктов P и Q, определенных задачей Ганзена. При выводе использован метод, которым оценивается точность при определении положения точки с помощью обратной засечки. В качестве исходной формулы взята дифференциальная формула дирекционного угла, а также применяются известные формулы теории ошибок. В случае, когда при полигонометрических работах углы измерены по способу круговых приемов, оценка точности производится на основании выведенных формул вида

$$M_P^2 = \frac{2}{D^2}\left[(S_5 + S_6 + S_{15})\, S_4^2 + (S_5 + S_7)\, S_3^2 + S_5 S_{10}^2 + (2S_8 + S_{16})\, S_3 S_4 + S_3 S_5 S_{10}\right] m^2,$$

$$M_Q^2 = \frac{2}{D^2}\left[(S_{11} + S_{12})\, S_2^2 + (S_{12} + S_{13} + S_{17})\, S_1^2 + S_{12} S_9^2 - (2S_{14} + S_{18})\, S_1 S_2 + S_2 S_{12} S_9\right] m^2;$$

если углы измерены способом повторений, то применяются формулы вида

$$M_P^2 = \frac{1}{D^2}\left[(S_5 + S_6)\, S_4^2 + (S_5 + S_7)\, S_3^2 + S_5 S_{10}^2 + 2S_3 S_4 S_8\right] m_\beta^2,$$

$$M_Q^2 = \frac{1}{D^2}\left[(S_{11} + S_{12})\, S_2^2 + (S_{12} + S_{13})\, S_1^2 + S_{12} S_9^2 - 2S_1 S_2 S_{14}\right] m_\beta^2.$$

И. Ф. Шелихова

3 В223. Отражение быстрых нейтронов от воды. Berger Martin J., Cooper John W. Reflection of fast neutrons from water. «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1959, **A63**, № 2, 101—144 (англ.)

Подробно описывается расчет методом Монте-Карло на вычислительной машине ИБМ-704 обратного рассеяния (альбедо) нейтронов энергии 0,3; 1; 3; 6; 9 и 14 *Мэв*, падающих на полубесконечный слой воды. Целью работы авторы считают вычисление дифференциального и интегрального альбедо, описание расчета альбедо методом Монте-Карло для однократного и многократного рассеяния, описание расчета альбедо аналитическим методом для однократного рассеяния и

исследование зависимости альбедо от эффективного сечения упругого рассеяния, от неупругого рассеяния, поглощения, однократного или многократного рассеяния и от других факторов. Работа имеет следующие разделы: 1) Введение. 2) Переменные величины задачи. 3) Нейтронные, эффективные сечения для водорода и кислорода. 4) Альбедо при однократном рассеянии. 5) Метод Монте-Карло. 6) Выполнение расчетов и их результат. 7) Анализ результатов. 8) Приложение. Во введении рассматривается постановка задачи и причины использования метода Монте-Карло для ее решения. В качестве переменных задачи рассматриваются следующие величины: расстояние $z \geqslant 0$ от границы полубесконечного отражателя, направления падающих и отраженных нейтронов θ_0 и θ, энергии падающих и отраженных нейтронов E_0 и E, дифференциальное альбедо

$$A(E, \theta, E_0, \theta_0) = N(E, \theta)/N_0(E_0, \theta_0),$$

где $N_0(E_0, \theta_0)$ и $N(E, \theta)$ — количества падающих и отраженных нейтронов, числовое альбедо

$$A_N(E_0, \theta_0) = \int_0^{E_0} dE \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta A(E, \theta, E_0, \theta_0),$$

энергетическое альбедо

$$A_E(E_0, \theta_0) = \int_0^{E} dE \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{E}{E_0} A(E, \theta, E_0, \theta_0)$$

и вероятности отражения при различном числе соударений. В разделе 3 приводятся исходные числовые данные о дифференциальном и интегральном эффективных сечениях рассеяния на кислороде и водороде. В разделе об альбедо при однократном рассеянии рассматривается вероятность

$$A^{(1)}(E, \theta, E_0, \theta_0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{p_j(E_0) H_j(E, \theta, E_0, \theta_0) \cos\theta}{\cos\theta - (\lambda_0/\lambda)\cos\theta_0}$$

того, что нейтрон, падающий на полубесконечную среду с энергией E_0 по направлению θ_0, отразится с энергией E по направлению θ в результате только одного соударения, а также энергетический спектр и угловое распределение отраженных нейтронов и функция рассеяния $H_j(E, \theta, E_0, \theta_0) = F_j(E, E_0) \cdot \delta(\cos\theta - \cos\alpha)$, где $F_j(E, E_0)$ — вероятность, что энергия нейтрона после соударения лежит между E и $E + dE$, δ — дельта-функция Дирака. В разделе о методе Монте-Карло рассмотрен механизм случайных блужданий и приемы получения и использования случайных чисел для вычисления следующих этапов истории движения нейтрона: а) определение положения нейтрона z_{n+1} после n-го соударения, б) выбор одного из четырех возможных типов соударения нейтрона с ядрами кислорода и водорода, в) выбор величины потери энергии при n-м соударении, г) выбор направления нейтрона после n-го соударения. В последних трех разделах работы сообщается, что программа вычислений была составлена для определения альбедо для полубесконечной среды и конечных пластин (последнее будет опубликовано позже), причем часть программы для полубесконечной среды занимает менее 2000 ячеек памяти на магнитных сердечниках. Для каждого случая вычислялось и обрабатывалось 3000 нейтронных историй, что давало достаточную точность и требовало около 25 мин. машинного времени. В работе сосчитано 38 различных случаев альбедо. На основании расчетов авторы получили следующие результаты: 1) вклад в альбедо однократного и многократного рассеяния; 2) энергетические спектры отраженных нейтронов; 3) угловое распределение отраженной энергии при однократном и многократном рассеянии; 4) зависимость альбедо от энергии источника и от направления; 5) эффект поглощения и неупругого рассеяния; 6) эффект анизотропии при упругом рассеянии; 7) часть спектра в области низких энергий и 8) зависимость альбедо от толщины конечного слоя. Для вычисления альбедо в зависимости от различных начальных условий использовался расчет различных вариантов или метод коррелированных случайных блужданий. В. Я. Евфанов

3 В224. Применение метода Монте-Карло в статистической физике. Фишер И. З., «Успехи физ. наук», 1959, **69**, № 3, 349—369

Обзорная статья по применению метода Монте-Карло для вычисления конфигурационного интеграла

$$Q_N = \iint_V \ldots \int \exp\{-U_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)/kT\} d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N, \quad (1)$$

интегральных выражений, определяющих средние значения функций от координат:

$$\overline{F} = \frac{1}{Q_N} \iint_V \ldots \int F(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \exp\{-U_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)/kT\} \times d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N \quad (2)$$

и термодинамических характеристик классической конденсированной системы, где $U_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — известная функция взаимодействия частиц, а $N, V \to \infty$. Для применения метода Монте-Карло непрерывное $3N$-мерное конфигурационное пространство изучаемой системы превращается в дискретное путем подразделения на произвольно большое число s равных по объему ячеек номера i ($i = 1, 2, \ldots, s$). Считается, что система находится в i-м состоянии, если изображающая ее точка находится в i-й ячейке, и что в каждом состоянии системе можно приписать определенное численное значение F_i любой функции координат $F(\mathbf{r})$. Тогда вместо (1) и (2) получается:

$$Q \sim Q'_N = \sum_{i=1}^{s} \exp\{-U_i/kT\}, \quad (3)$$

$$\overline{F} = \frac{1}{Q_N} \sum_{i=1}^{s} F_i \exp\{-U_i/kT\}. \quad (4)$$

Совокупность всех s возможных состояний системы рассматривается как набор случайных событий A_i, образующих цепь Маркова с постоянными вероятностями $p_{ij} \geqslant 0$ переходов $A_i \to A_j$, причем

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \quad (5)$$

Если рассматривать цепь с неограниченным числом шагов, то среднее значение $\overline{F} = \sum_{i=1}^{s} F_i u_i$ от некоторой функции состояния F_i, взятое вдоль цепи, где $u_i = Q'^{-1}_N \exp\{-U_i/kT\}$, совпадает со средним каноническим значением функции (4), причем в соответствии с принципом макроскопической обратимости

$$p_{i,j} \exp\{-U_i/kT\} = p_{j,i} \exp\{-U_j/kT\}. \quad (6)$$

Цепь Маркова, все состояния которой удовлетворяют условиям (5) и (6), сходится к каноническому ансамблю Гиббса в том смысле, что при достаточно долгом продолжении длины цепи различные состояния стремятся появиться с частотами, пропорциональным $\exp\{-U_i/kT\}$. Для построения на вычислительной машине рассматриваемой цепи Маркова, одношаговые вероятности переходов выбираются следующим образом. Пусть $x_r^{\alpha(i)}$, где $\alpha = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, \ldots, N$, означает α-ю декартову координату r-й частицы в i-й конфигурации. Единичный шаг в цепи Маркова заключается в перемещении на некоторое расстояние только одной частицы, так что $p_{ij} = 0$, если конфигурации i и j различаются положениями двух или более частиц. Вводится некоторая произвольная фиксированная длина δ, которая ограничивает

величину возможного перемещения на один шаг. Если длина перемещения такова, что $\left|x_r^{\alpha(i)} - x_r^{\alpha(j)}\right| > \delta$, то $p_{ij} = 0$, если же $\left|x_r^{\alpha(i)} - x_r^{\alpha(j)}\right| \leqslant \delta$, $x_s^{\beta(i)} - x_s^{\beta(i)} = 0$, причем $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, \ldots, N$, $s = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, N$, то $p_{ij} = C$ при $U_j \leqslant U_i$ и

$$p_{ij} = C \exp\{-(U_j - U_k)/kT\} \text{ при } U_j > U_i,$$

$j \neq i$ и $p_{ij} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{s} p_{ij}$, если $j = i$ ($C = \text{const}$).

С помощью такого моделирования производятся вычисления методом Монте-Карло для реальных систем для двумерных и трехмерных случаев с потенциалом межмолекулярных сил в форме Ленард—Джонса $\Phi(r) = \varepsilon\{(a/r)^{12} - 2(a/r)^6\}$ и с моделью «твердых шариков» диаметра a, для которой $\Phi(r) = +\infty$ при $r < a$ и $\Phi(r) = 0$ при $r > a$. (Здесь $\Phi(r)$ — взаимный потенциал двух частиц при расстоянии $r = r_{ik}$ между ними, который входит в полную энергию взаимодействия частиц системы следующим образом:

$$U_N(r_1, r_2, \ldots, r_N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Phi(r_{ik})).$$

Расчеты для потенциала в форме Ленард—Джонса проводились для систем с 32 и 108 молекулами аргона в основной ячейке. Была реализована 31 цепь Маркова для 13 значений приведенного объема. Длина цепи в различных случаях колебалась от 30 до 500 тыс. переходов. Расчеты для системы твердых шариков проводились для системы с 256 и 32 частицами в основной ячейке при длине цепей Маркова, достигающих нескольких миллионов переходов. По величине энергии взаимодействия U_N определялись термодинамические характеристики системы. Результаты вычислений методом Монте-Карло анализируются и сравниваются с результатами вычислений другими методами и экспериментальными данными, где это возможно. В заключение автор указывает, что появившиеся пока что первые работы по применению методов Монте-Карло к статистической физике говорят о плодотворности и эффективности этих методов. В. Я. Евфанов

См. также: 3Б149, 3Б153, 3Б237, 3Б340

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

3 В225. Проблема программирования с изменением машин. Ч. I Strong J., Wegstein J., Tritter A., Olsztyn J., Mock O., Steel T. The problem of programming communication with changing machines. A proposed solution. Part I. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1958, 1, № 8, 12—18 (англ.)

Статья посвящена проблемам преобразования одних языков (не обязательно машинных) в другие (машинные). Отмечается, что с усложнением вычислительных машин и с расширением проблем, решаемых на этих машинах, работа программиста все более и более усложняется. Существующие компилирующие программы лишь в незначительной степени облегчают перевод с языка, на котором записана задача, на язык, с которым оперирует машина, и ни в коем случае не являются универсальными. Предлагается создать трехступенчатую систему. Верхний ряд системы — «проблемные языки» (например, «Fortran», «Datacode» и т. д.). С помощью генераторов (специальные программы) «проблемный язык» переводится на универсальный язык «UNCOL» (промежуточный ряд). С помощью «трансляторов» происходит перевод с языка «UNCOL» на конкретный машинный язык (например, ИБМ-650, ИБМ-704 и т. д.). Машинные языки — нижний ряд системы. Для преобразования на язык «UNCOL» и с него на машинный язык предлагается создать специальное преобразующее устройство, которое (по утверждению авторов) может быть сконструировано, спрограммировано и смонтировано в течение трех лет. Приводятся лишь общие соображения о требованиях к языку «UNCOL». Утверждается, что возможно создать достаточно универсальный язык, который в течение будущих пятнадцати лет будет вполне удовлетворительным. Н. Н. Поснов

3 В226. Переводящая программа для вычислительной машины ДЭЮКЕ. Brigham R. C., Bell C. G. A translation routine for the DEUCE computer. «Comput. J.», 1959, 2, № 2, 76—84 (англ.)

Описывается компилирующая система СОДА (SODA—Symbolic Optimum Deuce Assembly Program) для машины ДЭЮКЕ, очень близкая к компилирующей системе СОАП. Система допускает программирование с мнемоническими кодами команд и буквенными адресами. При программировании производится оптимальное распределение адресов ячеек оперативной памяти на ртутных линиях задержки. Описываются функции компилирующей программы, дается список (1+1) -адресных псевдокоманд, приводятся два примера. А. П. Ершов

3 В227. О принципах построения одной специализированной программирующей программы. Стогний А. А. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 2. М., Физматгиз, 1959, 185—189

Предлагаются принципы построения специализированной программирующей программы для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных с начальными условиями. Из существующих численных методов автор отдает предпочтение методам Адамса — Штермера и Рунге-Кутта (стандартные программы обоих этих методов известны). Обе эти программы (как и вообще большинство библиотечных программ) нуждаются в подготовительной работе еще одной программы, которая производит засылку исходных данных о задаче и составляет программу вычислений функций, необходимых для решения данной задачи. Специализированная программирующая программа для решения системы с начальными условиями по методу Адамса — Штермера обеспечивает: а) построение начальных грубых приближений $y_k(x)$ для всех k в точках x_1 и x_2, б) уточнение этих приближений, в) вычисление последующих y_k. Приводятся формулы счета. Программа обеспечивает требуемую точность вычислений повторением вычислений y_k с половинным шагом. Контроль за правильностью работы программы производится посредством дублирования вычислений с данным шагом.

Г. П. Зеленкевич

3 В228. О некоторых общих вопросах программирования. Акушский И. Я. В сб. «Вопр. теории матем. машин», I. М., Физматгиз, 1958, 63—109

Указывается, что положение, когда рациональность производимых расчленений и выбор наиболее целесообразных элементарных операций и их последовательностей

при программировании носят скорее интуитивный характер и являются результатом искусства автора программы, должно в дальнейшем претерпеть существенное изменение. Программирование, так же как и любая другая сложившаяся математическая дисциплина, должно располагать своим специальным математическим аппаратом. Этот аппарат должен точным и исчерпывающим образом описывать (с точки зрения получающихся числовых результатов) процессы, происходящие в машинах, и давать возможность соответствующими, присущими этому математическому аппарату, методами разрабатывать нужные программы для подлежащих решению задач. Предметом статьи является рассмотрение вопросов программирования циклических вычислительных процессов программными операторами общего типа. В §§1, 2 вводятся некоторые понятия, обозначения, функции и операторы, определенные на конечном множестве целых чисел. В §3 вводятся понятия командного и программного операторов, определяется программный цикл. В §4 вводится оператор ввода и даются на примере трехадресных команд некоторые сведения о структуре и свойствах командных операторов. В §5 определяется однородная вычислительная задача. Перечень параграфов последующей части статьи: §6. Условия программируемости решения однородной вычислительной задачи однородным программным циклом. §7. Линейные программные операторы. §8. Примеры применения условия программируемости для линейных операторов. §9. Условия программируемости решения однородной вычислительной задачи неоднородным программным циклом. §10. Программирующие множители. Добротные программные операторы. §11. Вычисление стартовых функций. §12. Программируемость решения обратной задачи. §13. Условия одновременной разрешимости.

Н. Н. Поснов

3 В229. Предложение возможной системы программирования. Bagley Philip R. Proposal for a feasible programming system. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 8, 7—10 (англ.)

Приведен обзор некоторых общих положений и правил, относящихся к составлению сложных программ для вычислительных машин, работающих в реальном масштабе времени. Учитываются трудности и ограничения, связанные с ограниченной скоростью вычислений, емкостью памяти и временем доступа. Указывается также, что не всегда выгодно оптимизировать программы в смысле, применяемом обычно в математических и деловых расчетах из-за частых изменений программы в процессе эксплуатации.

М. Д. Хахин

3 В230. Программное распределение времени работы машины. Strachey C. Programme—controlled time sharing. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 462. Discuss., 463—464 (англ.)

Аннотация доклада, прочитанного в институте инженеров-электриков на совещании по новым устройствам цифровых вычислительных машин. Рассматривается способ распределения времени выполнения операций на вычислительной машине, когда основная программа автоматически прерывается на короткий период, для того чтобы вычислительная машина могла выполнить логические и арифметические операции для подключенного оборудования; в связи с этим предусматривается автоматичность программирования времени выполнения операций, установка блокировочных и промежуточных устройств. Управление комплектующим оборудованием осуществляется так называемой «директор»-программой, хранящейся в основном запоминающем устройстве; последовательность команд «директор»-программы заканчивается командой «ожидание», которая позволяет возвратиться к более ранней очередности команд. Для хранения этой программы можно применять обычные запоминающие регистры.

А. С. Вавилова

3 В231. Автоматическое программирование удешевляет стоимость эксплуатации вычислительных машин. Grier Thomas S. Automatic programing: it can help cut computer operating costs, «Oil and Gas J.», 1959, 57, № 45, 80—82 (англ.)

Приводятся простейшие примеры составляющих программ в специальных символах. Обсуждаются преимущества метода составляющих программ: малый объем информации, первоначально вводимой в машину, отсутствие необходимости длительной подготовки программиста, уменьшение вероятности возникновения ошибки в программе в связи с машинным составлением рабочей программы.

М. Д. Хахин

3 В232. «Фортран» — математический язык для вычислительных машин. Bobilier P. A. Fortran: un langage mathématique pour ordinateurs. «Rev. techn. europ.», 1959, 28, № 687, 16—17 (франц.)

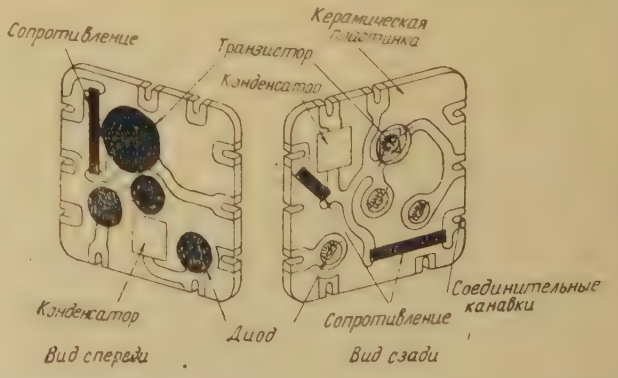
Статья общего характера.

3 В233. Симпозиум по отбору и обучению программистов (для деловых расчетов). Gearing H. W. Symposium on the selection and training of programmers. A business user's approach. «Comput. J.», 1959, 2, № 3, 107—109 (англ.)

Изложен опыт организации работы и обучения группы программистов.

3 В234. Микроминиатюризация космической вычислительной машины. Keonjian Edward. Microminiaturization of space computer. Amer. Rocket Soc. (Preprints), 1959, № 998, 13 pp., ill. (англ.)

Разбираются различные методы уменьшения объема и повышения надежности работы бортовой вычислительной машины для космических ракет. На основании проведенных исследований фирма «Арма» (American Bosch Arma Corp.) осуществила программу микроминиатюризации вычислительной машины «Арма», предназначенной для управления полетом различных объектов (ракет, самолетов). Центральной лабораторией фирмы была разработана технология изготовления «двумерных» миниатюрных блоков. Отдельный микроблок представляет собой плоскую квадратную керамическую пластинку размерами 12,5 *мм*×12,5 *мм*×0,75 *мм*, на поверхности которой испарением различных веществ образованы электрические цепи: проводники, сопротивления, конденсаторы (рис. 1). Полупроводниковые микроприборы, изготовляемые фирмой «Транзитрон электроник корпорейшен» (Transitron Electronic Corp.) в виде капсюль, запрессованы в отверстия диаметром 2,5 *мм* для триода и 1,5 *мм* для диода. Из 11 микроблоков набирается функциональная сборка, а 12 функциональных сборок составляют функциональный блок, который помещен в герметический разъем, наполненный теплопроводным инертным газом. Размер функционального блока 7,5 *см*× ×5,6 *см*×1,8 *см*. Такая конструкция определяет высокую плотность электрических цепей: до 2000 микроблоков в 1000 *см*³. Запоминающее устройство машины вы-



полнено на трансфлюксорах. Внешний диаметр сердечника 2,5 *мм*. Емкость запоминающего устройства составляет 30 000 двоичных разрядов. Ячейка сумматора состоит из 7 усилителей, 1 триггера и 8 схем совпадения. Устройство работает с частотой 140 *кгц* при длительности импульса 1,4 мксек. Общий вес вычислительной машины 5,5 *кг*, что составляет 0,1 часть по весу и объему от ранее построенной вычислительной машины «Арма», выполняющей те же самые функции. Внешний вид показан на рис. 2. Опытный образец намечено выпустить

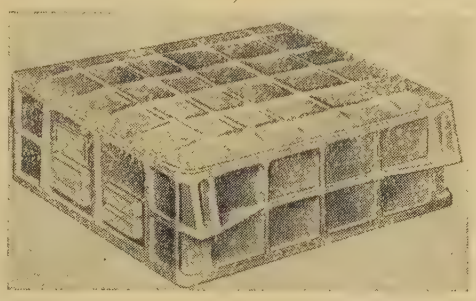


Рис. 2

в 1962 г. Г. И. Гришаков

3 В235. Принципы построения и устройство современных электронных вычислительных машин. Bobillier P.-A. Conception et structure des ordinateurs modernes. «Bull. techn. Suisse romande», 1959, **85**, № 22, 346—354 (франц.)

Рассматривается структура современных электронных вычислительных машин. Приведены технические данные вычислительных машин ИБМ-7070 и ИБМ-7090. Машина ИБМ-7070 работает в десятичной системе счисления. Емкость оперативного запоминающего устройства (з. у.) 5000—10 000 десятизначных десятичных чисел. Время обращения к з. у. 6 мксек. Скорость вывода 500 перфокарт в 1 мин., скорость перфорации 250 перфокарт в 1 мин. Время сложения 72 мксек., время умножения 672 мксек., для множителя, содержащего 10 раз цифру 1 и 1632 мксек. для множителя, содержащего 10 раз цифру 9. Используется система автоматического программирования ФОРТРАН (FORTRAN—Programme de FORmulation TRANsposée), принципы которой являются общими для всех электронных машин фирмы «ИБМ». Электронная вычислительная машина ИБМ-7090 построена на транзисторах и магнитных сердечниках нового типа. Емкость з. у. этой машины 32768 35-значных двоичных чисел (примерно 10 десятичных). Время обращения к з. у. 2,4 мксек. Машина ИБМ-7090 может одновременно производить операции «ввод», «выход», расчет». Данные о скорости работы машины ИБМ-7090 даны в следующей таблице:

Операции	Время в мксек.	Число операций в 1 сек.
1) С фиксированной запятой		
сложение или вычитание	4,8	208 000
умножение	38,0	26 300
деление	48,0	20 800
2) С плавающей запятой		
сложение или вычитание	16,8	59 500
умножение	34,0	29 400
деление	43,2	22 500

В заключение сообщается об электронной вычислительной машине СТРЕТЧ, которой еще нет в серийном производстве. Ее быстродействие 500 000 умножений и 2 000 000 сложений или вычитаний в 1 сек. Машина СТРЕТЧ заказана компании ИБМ правительством США для выполнения работ, связанных с ядерными исследованиями. В. Л. Евтеев

3 В236. Большая вычислительная машина ИБМ-7070 на полупроводниковых триодах.— Transistorisierte Großrechenanlage IBM 7070. «Elektronik», 1959, **8**, № 4, 125 (нем.)

См. РЖМат, 1960, 11629.

3 В237. Новая вычислительная машина ИБМ-7070.— Le nouvel ordinateur IBM 7070. «Automatisme», 1959, **4**, № 6, 252 (франц.)

3 В238. Вычислительные машины и устройства обработки информации (Северная Америка)—. Computers and data processors. North America. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 4, 35—38 (англ.)

В Национальной лаборатории Брукхэвен строится быстродействующая цифровая вычислительная машина «Мерлин», напоминающая по структуре машину «Маниак II». Электростатическое запоминающее устройство на электронно-лучевых трубках с плотностью записи 6000 знаков на трубку имеет общую емкость 12288 48-разрядных чисел, с временем обращения 8 мксек. Числа с фиксированной и плавающей запятой представляются в виде $N = 2^{8y}x$, 41 разряд числа занимает x, включая знак, 5— y, включая знак, а 2 разряда используются как ярлыки. Арифметическое устройство, кроме 3 арифметических регистров сдвига, имеет 4 регистра временного хранения. Машина работает асинхронно и с плавающей запятой будет выполнять операцию сложения за 7 мксек., умножения за 90 мксек. Команда машины содержит 1—2 адреса запоминающего устройства и до 3 адресов, если используются регистры временного хранения. В машине используются 8000 вакуумных ламп и полупроводниковых триодов, размещается она в 31 шкафе и вместе с входными и выходными устройствами занимает площадь 70 $м^2$. Фирмой «Датаматик» выпускается вычислительная машина среднего размера по габаритам и стоимости «Хонейвелл-800». Эта полупроводниковая машина работает как с десятичными, так и двоичными числами с фиксированной и плавающей запятой. Она может одновременно проводить вычисления по 8 различным программам, эффективность которых обеспечивается устройствами маршрутного и многопрограммного контроля. Скорость работы 30 000 трехадресных операций в 1 сек. Возможно накопление серии чисел со скоростью 125 000 чисел в 1 сек. Используется до 4 блоков запоминающего устройства на ферритовых сердечниках, емкостью 4096 чисел каждый. Машина оперирует с 54-разрядными числами, из которых 6 разрядов используются для контроля. В этом числе может содержаться 11 десятичных разрядов и знак. При операциях двоичными числами с плавающей запятой число представляется разрядом знака, 7-разрядной экспонентой и 40-разрядной мантиссой. С каждой программой может быть связано до 8 индексных регистров. Национальное Бюро стандартов США устанавливает вычислительную систему ПАЙЛОТ, состоящую из 3 машин, которые могут работать как независимо друг от друга, так и совместно над решением общей задачи. Система выполняет большинство программ в 100 раз быстрее, чем СЕАК, а некоторые программы в 1000 раз быстрее. Фирма «Нортроп» производит полупроводниковый цифровой дифференциальный анализатор АПАК, содержащий 345 германиевых триодов 1200 диодов, имеющий объем 0,055 $м^3$, вес 45,3 *кг* и потребляющий 132 *вт* энергии. Эта же фирма разрабатывает вычислительную машину для работы в системе инерциальной навигации. Эта машина сочетает преимущества интегральной и инкрементальной машины. Машина будет иметь объем 0,03 $м^3$, вес 24 *кг*. О. В. Бачин

3 В239. Счетное устройство с программным управлением X-1. Schuff Hans Konrad. Die programm-

gesteuerte Rechenanlage X-1. «Elektron. Datenverarb.», 1959, № 1, 23—31 (нем.; рез. англ.)

В июне 1958 г. голландской фирмой «N. V. Electrologica» был изготовлен первый образец универсальной вычислительной машины X-1. Конструкция машины была разработана группой инженеров амстердамской центральной математической школы. В настоящее время изготовляется еще 8 подобных машин. Все схемы X-1 выполнены на транзисторах. В результате этого мощность, потребляемая счетным устройством (без памяти, входных и выходных устройств), равна всего 150 *вт*. Машина не требует специального охлаждения. Общая площадь, занимаемая машиной X-1, при одном шкафе памяти вместе с отдельно выполненными входными и выходными устройствами равна 40 $м^2$. При этом само счетное устройство занимает (без шкафа памяти) 20 $м^2$. Ввод данных в машину осуществляется или с перфоленты со скоростью 150 знаков в 1 сек. (считывающее устройство фирмы «Ferranti»), или с перфокарт. В последнем случае при вводе с табулятора скорость ввода равна 9000 карт в 1 час, при вводе с удвоителя 14 400 карт в 1 час (2 дорожки), при вводе по системе «Schnelleser» 42 000 карт в 1 час. При вводе употребляется обычный код. Вывод на перфоленту происходит со скоростью 25 знаков в 1 сек., на пишущую машинку 10 знаков в 1 сек. (пишущая машинка фирмы «IBM Execintire»), на табулятор 9000 строк в 1 час. При выводе на перфокарты скорость равна 7200 карт в час. Память машины выполнена на магнитных сердечниках с длительностью цикла работы порядка 16 мксек. Емкость одного шкафа памяти 512 ячеек, каждая из которых содержит 28 двоичных разрядов. Кроме этой основной памяти, имеется так называемая «мертвая память», в которой хранятся стандартные подпрограммы и константы. «Мертвая память» допускает только считывание и не допускает записи с помощью основного устройства управления. Внешняя и промежуточная память машины пока еще не существуют. Предполагается, что внешний накопитель будет осуществлен на магнитной ленте. Машина работает в двоичной системе счисления с числами, представляемыми в форме с фиксированной запятой. Из 28 разрядов для представления числа в машине 26 служат для записи самого числа, один — для записи знака и один — для контроля переполнения. Отрицательные числа представляются дополнительным кодом. Арифметическое устройство состоит из двух независимых друг от друга накапливающих сумматоров (*A* и *S*), которые могут работать одновременно. Кроме того, имеется 15-разрядный регистр *B*, предназначенный для модификации команд. Регистр *B* может работать одновременно с сумматорами *A* и *S*. Кроме этих основных регистров, имеется еще целый ряд вспомогательных регистров. Программа для ввода в машину пробивается на перфоленте. Код каждой команды занимает 7 столбцов (с нулевого по шестой) перфоленты. Для ввода программы служит специальная программа, так как запись программы на перфоленте осуществляется в относительных адресах. При записи кода команды на перфоленте в нулевом столбце ставится условие выполнения данной команды в арифметическом устройстве, в первом — код операции, во втором, третьем и четвертом столбцах — адрес, в пятом и шестом столбцах — условия модификации данной команды при ее выполнении. Код команд имеет следующую форму:

Функциональный код	Нулевой столбец	5-й столбец	6-й столбец	Операция без модификации	Время без модификации, мксек
0*R*	*U,Y,N*	*A,B,C*	*P,Z,E*	$(R)+(n)\Rightarrow(R)$	64
1*R*	»	»	»	$(R)-(n)\Rightarrow(R)$	64
2*R*	»	»	»	$+(n)\Rightarrow(R)$	64
3*R*	»	»	»	$-(n)\Rightarrow(R)$	64
4*R*	»	*B,C*	»	$(n)+(R)\Rightarrow(n)$	76
5*R*	»	»	»	$(n)-(R)\Rightarrow(n)$	76
6*R*	»	»	»	$+(R)\Rightarrow(n)$	64
7*R*	»	»	»	$-(R)\Rightarrow(n)$	64

В этой таблице *R* означает любой из трех регистров *A*, *B* или *S*. Модифицирующие символы имеют следующее значение: *U* — без изменения регистра (т. е. результат операции не переносится в регистр и используется, например, для выработки условия); *Y* — команда выполняется только в том случае, когда во вспомогательном регистре *C*, состоящем из одного двоичного разряда, стоит 0; *N* — команда выполняется только тогда, когда содержимое регистра *C* равно единице; *A* — вместо содержимого ячейки с номером *n* используется само *n*; *B* — в качестве адреса используется $n+(B)=n'$, команда, хранящаяся в памяти, не меняется; *C* — в качестве адреса используется $n+(B)=n'$, команда, хранящаяся в памяти, переадресовывается аналогичным образом; *P* — перенести знак результата операции в *R*, а после этого в *C*; *Z* — 1-й случай $(R)=0$, $0\Rightarrow(C)$, 2-й случай $(R)\neq 0$, $1\Rightarrow(C)$; *E* — 1-й случай $R_{26}=(LZ)$, $0\Rightarrow(C)$, 2-й случай $R_{26}\neq(LZ)$, $1\Rightarrow(C)$. Вспомогательный регистр *LZ* служит для запоминания знака предыдущего результата. При признаках модификации *P*, *Z* и *E* знак результата операции всегда передается в *LZ*. Остальные

Функциональный код	Нулевой столбец	5-й столбец	6-й столбец	Операция без модификации	Время без модификации, мксек
0*X*	*Y, N*	*A, B, C*	*P, Z, E*	$(A)+(n)(S)\Rightarrow(A,S)$	500
1*X*	«	«	«	$(A)-(n)(S)\Rightarrow(A,S)$	«
2*X*	«	«	«	$+(n)(S)\Rightarrow(A,S)$	«
3*X*	«	«	«	$-(n)(S)\Rightarrow(A,S)$	«
0*D*	«	«	«	$(A,S):+(n)\Rightarrow(S)$ Rest (A)	«
1*D*	«	«	«	$(A,S):-(n)\Rightarrow(S)$ Rest (A)	«
2*D*	«	«	«	$(A)\cdot 2^{26}:+(n)\Rightarrow(S)$ Rest (A)	«
3*D*	«	«	«	$(A)\cdot 2^{26}:-(n)\Rightarrow(S)$ Rest (A)	«

Для этой группы кодов в поле адреса содержимое регистра *A* или модифицирующие символы *P*, *Z* и *E*. Логические операции.

Функциональный код	Нулевой столбец	5-й столбец	6-й столбец	Операция без модификации	Время без модификации, мксек
0*LR*	*U, Y, N*	*A, B, C*	*P, Z, E*	$(R)\vee(n)\Rightarrow(R)$	64
1*LR*	«	«	«	$(R)\vee-(n)\Rightarrow(R)$	«
2*LR*	«	«	«	$(R)\,\&\,+(n)\Rightarrow(R)$	«
3*LR*	«	«	«	$(R)\,\&\,-(n)\Rightarrow(R)$	«

R означает здесь регистры *A* или *S*.

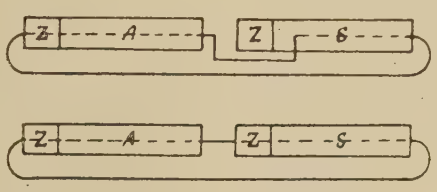
Команды, связанные со счетчиком команд (регистр *C*),

Функциональный код	Нулевой столбец	5-й столбец	6-й столбец	Операция без модификации	Время без модификации, мксек.
0T	U, Y, N	A, B, C	P	(0T) + (n) ⇒ (0T)	64
1T	«	«	«	(0T) − (n) ⇒ (0T)	«
2T	«	«	«	+ (n) ⇒ (0T)	«
3T	«	«	«	− (n) ⇒ (0T)	«

Модифицирующий символ $\hat{P}$ в этой группе приказов имеет следующее значение: приказ выполняется только тогда, когда содержимое регистра переполнения (U) равно единице и установить в U ноль. Кроме этих групп команд, имеются еще команды сдвига, код которых имеет следующий вид:

Столбцы 1	0	2	4	5	6	Действие	Время, мксек.
0P	Y, N	ν	AA, SS, AS, SA	B, C	P, Z, E	Цикл. сдвиг влево на ν разрядов	40+8ν
1P	—„—	ν	—„—	—„—	—„—	Цикл. сдвиг вправо на ν разрядов	40+8ν
2P	—„—	ν	—„—	—„—	—„—	Линейный сдвиг влево на ν разрядов	40+8ν
3P	—„—	ν	—„—	—„—	—„—	Линейный сдвиг вправо на ν разрядов	40+8ν
4P	U, Y, N		R_1, R_2	—„—	—„—	$(R_1) \Rightarrow (R_2)$	36
5P	—„—		—„—	—„—	—„—	$-(R_1) \Rightarrow (R_2)$	36
6P	Y, N		AA, SS, AS	—„—	—„—	Нормировать (A), (S) или (A, S) на число (B)	
7P	—„—					Останов	

R_1 и R_2 могут быть регистрами A, S или B. Разрешается $R_1 = R_2$. При кодах $0P$—$3P$ 4-й столбец указывает, какой из двух возможных сдвигов выбирается. При AA или SS сдвиг только в одном соответствующем регистре. При AS и SA сдвиг происходит по схеме, данной на рисунке.



Команда $7P$ есть обычный останов машины. Для умножения на 10 в машине Х-1 имеются специальные команды, выполняемые быстрее, чем обычные команды умножения:

Столбцы 1	2—4	0	5	6	Действие	Время, мксек.
6Z	32XX	Y, N	B, C	P, Z, E	10·(S) ⇒ (A, S)	64
6Z	33XX	—„—	—„—	—„—	10·(S) ⇒ (S)	64

Наконец, для изменения порядка следования команд в программе служат следующие команды переходов:

Столбцы 1	0	5	6	Действие	Время, мксек.
4T	U, τ, N	m	P, Z, E	$(\tau_m) - 1 \Rightarrow (\tau_m)$, $(n) \Rightarrow (OZ)$	76
6T	«	«	«	$(C), (LZ), (OZ) \Rightarrow (\lambda_m), (n) \Rightarrow (OZ)$	72

τ_m и λ_m означают ячейки специальной τ-памяти (8 ячеек) и λ-памяти (16 ячеек), P — очередной приказ выполняется только тогда, когда новое содержимое ячейки τ_m положительно, Z — очередной приказ выполняется только тогда, когда новое содержимое ячейки τ_m равно нулю, E — очередной приказ выполняется только тогда, когда содержимое ячейки τ_m, полученное после выполнения данной команды, неположительно. Подробно рассмотрена программа присвоения командам основной программы истинных адресов.

Д. А. Поспелов

3 В240. Вычислительная машина «Рикомп II».— «Recomp II» computer, «Mech. Engng», 1960, 82, № 1, 59, (англ.)

Сообщается о выпуске «North American Aviation's Autonetics Division» компактной универсальной одноадресной цифровой вычислительной машины «Рикомп II», построенной полностью на транзисторах. На этой машине может производиться до 1852 суммирований в 1 сек.; перемножения чисел с фиксированной запятой выполняются за 10,8 мсек., а с плавающей запятой— за 12,5 мсек. Машина имеет запоминающее устройство на вращающемся магнитном диске емкостью 4096 40-разрядных слов, причем каждое слово может содержать число с 12 десятичными разрядами или команды программы. Одновременно в машине может быть записано более 8000 команд или более 49 000 десятичных разрядов цифр. Машина устанавливается на небольшом столе и занимает два выдвижных его ящика. Входные и выходные устройства имеют большую гибкость и приспособлены для работы малоквалифицированного оператора. Указывается, что обучиться пользованию машиной можно за один день. Машина может использоваться в инженерных расчетах. И. Д. Алимов

3 В241. Новая вычислительная машина фирмы «ИБМ».—. New IBM computer, «Australas. Manufacturer», 1959, 44, № 2277, 89—90 (англ.)

Сообщается о предстоящем выпуске отделением фирмы «ИБМ» в Австралии (IBM Australia Pty. Limited) малогабаритной универсальной вычислительной машины ИБМ-1620. Скорость работы машины — более 100000 арифметических операций в 1 мин., объем запоминающего устройства на магнитных сердечниках с произвольной выборкой 20 000 цифр. Машина выполнена на полупроводниковых триодах и занимает такой же объем, как чертежный стол средних размеров. Внешними устройствами машины являются устройство считывания с перфоленты и электрическое печатающее устройство. Предусмотрено наличие обширной библиотеки стандартных программ для математических и статистических процессов. Предполагается создание специализированных библиотек с программами для нефтеперерабатывающих заводов, оптических фирм (расчет оптических систем), предприятий общественного пользования, гражданского строительства (программы расчета мостов, покрытий шоссейных дорог и т. п.). Машина хорошо приспособлена для такого круга задач, а также для применения в производственных процессах. Применительно к машине разработаны две новых системы программирования.

Е. Ф. Бережной

3 В242. Как работают электронные цифровые вычислительные машины. Davies D. W. Electronic digital computers. How they work, «FBI Rev.», 1960, № 118, 39—41, 43—44 (англ.)

В популярной форме описываются принципы работы электронных цифровых вычислительных машин и некото-

рые способы их применения в коммерческих и промышленных предприятиях и при переводе литературы с одного языка на другой. Кратко указываются некоторые перспективы развития цифровых машин, в том числе перспективы совершенствования за счет применения метода одновременного решения нескольких вадач, который позволяет решать в быстром темпе отлаженные задачи одновременно с проведением медленного решения задачи, требующей отладки. Освещаются возможности повышения быстродействия вычислительных машин за счет применения криотронов. Высказывается соображение о том, что развитие цифровых вычислительных машин пойдет одновременно по двум путям: разработка более простых и дешевых машин с быстродействием такого же порядка, какое имеют современные машины, и разработка машин с особо высоким быстродействием. Одной из основных областей применения машин с высоким быстродействием будет решение задач, требующих быстрой оценки многочисленных возможных вариантов событий. И. Д. Алимов

3 В243. Электронные вычислительные машины. Mertens H. M. Elektronische Rechenmaschinen. «Elektro-Anz.», 1959, **12**, № 16-17, 153—155 (нем.)

Статья общего характера.

3 В244. Вычислительные машины. Rosmann M. Maşini automate de calcul. «Gaz. mat. şi fiz.», 1959, **A11**, № 5, 257—266 (рум.; рез. русск., франц.)

Статья общего характера.

3 В245. Системы обработки данных. Цуцуми, Кадзиура. «Кэйсоку, Keisoku, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, **8**, № 11, 704—715 (японск.)

3 В246. Специализированная универсальная вычислительная машина на транзисторах. Schmidt J. D., Putschi H. N., Keonjian E. Transistorized special purpose computer. «Proc. Nat. Electronics Conf». Vol. 13. Chicago, Nat. Electronics Conf., Inc., 1958, 624—634 (англ.)

3 В247. Один простой дифференциальный анализатор. Fenyő István. Egy egyszerű differenciálanalizátor. «Mat. lapok», 1958, **9**, № 3-4, 283—288 (венг.)

3 В248. Логические схемы фирмы «ИБМ» на переключателях тока. Walsh J. L. IBM current mode transistor logical circuits. «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 34—36. Discuss., 37—39 (англ.)

Рассматривается система элементов на основе переключателей тока, использующих дрейфовые транзисторы *p-n-p* и *n-p-n* типов, обеспечивающих задержку при прохождении сигнала не более 20 наносек. на один элемент. Подробно рассмотрен режим работы триодов в схемах переключателей тока, обеспечивающий оптимальное использование триодов по частоте. Приведена эквивалентная схема для представления влияния на токовый переключатель различного рода помех (по цепям питания, емкостных и индуктивных наводок). Показаны причины хорошей помехоустойчивости токового переключателя. Рассмотрены возможности реализации различных логических функций («и»; «или», «или с исключением» и триггера) схемой токового переключателя. Рассмотрена работа схем на триодах типа *n-p-n* и *p-n-p* для передачи сигналов управления с выхода токового переключателя через согласованный коаксиальный кабель на вход аналогичного переключателя. В рассматриваемой системе элементов используются дрейфовые транзисторы с $\beta \geqslant 20$; $70\ мгц \leqslant f_{\alpha пред} \leqslant 150\ мгц$; $40\ ом \leqslant r_{вв} \leqslant 80\ ом$ и $U_{эд.обр} > 2{,}5\ в$. При использовании переключателей тока стабильность источников питания должна быть не хуже ±4%, а разброс используемых сопротивлений не должен превышать ±3%. Задержка сигнала при прохождении его через переключатель составляет от 6 до 22 наносек. в зависимости от нагрузки элемента. Типовой элемент допускает работу на входы трех аналогичных элементов. Допускаемое число логических входов типового элемента зависит от числа нагрузок, подключаемых к его выходу. Максимальное число входов равно 6 — при нагрузке на 3 входа, 8 — при нагрузке на 2 входа и 1 — при нагрузке на 1 вход. Число входов почти не влияет на задержку сигнала при прохождении его через переключатель. В приведенной дискуссии участники конференции обменялись мнениями о рассмотренных системах элементов: с непосредственными связями, на токовых переключателях, с логическими схемами на сопротивлениях и др. Рассматриваются основные методы для сравнительной оценки этих элементов, возможности свести все характеристики к стоимости оборудования. А. Б. Залкинд

3 В249. Логические схемы с непосредственными связями. Angell James B. Direct-coupled logic circuitry. «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958, NT-107, New York, 1959, 22—27 (англ.)

В статье одного из сотрудников фирмы «Филко» (Philco Corp.) изложены основные принципы работы схем с непосредственными связями, эти схемы используют некоторые типы транзисторов, имеющие прямое смещение на коллекторном переходе при работе в режиме насыщения. Напряжение, снимаемое с коллектора такого транзистора, обеспечивает надежное запирание по цепи базы управляемых транзисторов. Для получения весьма малого остаточного напряжения на коллекторе насыщенного транзистора (порядка 0,15 *в*) сопротивления коллекторного и эмиттерного выводов должны быть весьма малыми. Подробно рассматриваются основные требования, предъявляемые к транзисторам, используемым в схемах с непосредственными связями. Коэффициент усиления по току в статическом режиме должен превышать определенную величину. Это обеспечивает работу транзисторов в достаточно глубоком насыщении даже при максимально допускаемой нагрузке. На практике число схем нагрузок составляет 2—3 при использовании поверхностно-барьерных и 6 при использовании микросплавных транзисторов. Число клапанов, которые могут одновременно управлять одной схемой нагрузки, составляет 3—6 для поверхностно-барьерных и 9—12 для микросплавных транзисторов. Приводятся неравенства, определяющие связь между допустимыми значениями питающего напряжения и сопротивления, параметрами используемых транзисторов и допустимым числом схем нагрузок и схем одновременно управляющих входом одной из схем нагрузок. Для удовлетворения указанным неравенствам у используемых транзисторов должны быть строго ограничены следующие параметры: 1) входной импеданс проводящего транзистора должен быть больше определенной величины, т. е. для определенной величины $V_{б.\,вкл.}$ ограничивается величина $I_{б.\,вкл.}$ Выполнение этого условия устраняет возможность потребления чрезмерного тока в цепи базы включенного транзистора; 2) выходной импеданс включенного транзистора должен быть меньше определенной величины, т. е. для заданных $V_{бэ}$ и $V_{кэ}$ ограничивается минимальная величина коллекторного тока $I_к$; 3) ограничивается максимальная величина коллекторного тока $I_{к.\,выкл.}$, соответствующая заданной величине $V_{бэ}$. При-

Параметр транзистора	Режим измерения
$I_{б.\,вкл.} < 0{,}4\ ма$	$I_к = 2{,}5\ ма$; $V_{бэ.} = 0{,}293\ в$
$V_{кэ.\,вкл.} < 0{,}075\ в$	$I_к = 2{,}5\ ма$; $V_{бэ.} = 0{,}293\ в$
$I_{к.\,выкл.} < 85\ мка$	$V_{кэ.} = -3\ в$; $V_{бэ.} = -0{,}1\ в$
$I_{ко.} < 3\ мка$	$V_{кб.} = -5\ в$
$f_{\alpha max} > 30\ мгц$	$V_{кб.} = -3\ в$; $I_к = -0{,}5\ ма$
$C_к < 6\ мкмкф$	$V_{об.} = -3\ в$
$r'_б C_к < 1{,}5\ мксек.$	$V_{кэ.} = -3\ в$; $I_к = -0{,}5\ ма$

водится таблица характеристик поверхностно-барьерных транзисторов, пригодных для использования в схемах с непосредственными связями.

По своим характеристикам для использования в схемах с непосредственными связями пригодны транзисторы 2N240 (поверхностно-барьерный) и 2N496 (кремниевый сплавной). Однако для этих транзисторов изготовители не указывают величину входного импеданса и поэтому требуется специальная проверка транзисторов по этому параметру. На практике усиление транзисторов по постоянному току ограничивают следующим образом: $I_{к\cdot вкл.}/I_{б\cdot вкл.}/>2$ · (число допустимых нагрузок, управляемых выходом одной схемы). Для транзисторов с указанными характеристиками время переключения не превышает 0,11 мксек. и уменьшается при увеличении нагрузки, так как при этом уменьшается степень насыщения. Для сплавных германиевых транзисторов с $f_{\alpha\ пред.}$ порядка 10 *мгц* время переключения в схемах с непосредственной связью составляет 0,5÷2 мксек. Вообще время переключения при использовании транзисторов в схемах с непосредственной связью возрастает в 1,5÷2 раза по сравнению с временами переключения, получаемыми при использовании тех же транзисторов в схемах с R—C связями. Большое внимание уделяется надежности схем с непосредственными связями. Надежной работе этих схем способствуют малые напряжения и мощность, рассеиваемая на транзисторах, и использование всего одного источника питания. Увеличение коллекторных токов выключенных транзисторов при повышении окружающей температуры и весьма малые уровни управляющих сигналов ухудшают надежность рассматриваемых схем. Из приведенных неравенств имеется возможность определить допустимые разбросы используемых сопротивлений. Было установлено, что в рассматриваемых схемах следует использовать сопротивления с разбросом ±1% и возможными изменениями в пределах ±3÷5%. Из всех перечисленных выше параметров транзисторов только величина $V_{бэ\cdot вкл.}$ ограничивается максимальным и минимальным допустимыми значениями. Но эта величина не изменяется при старении транзистора, так как она определяется объемными, а не поверхностными характеристиками полупроводника. Эксплуатация различных устройств, использующих схемы с непосредственными связями, определила, что на 10^7 транзисторо-часов приходится не более одного отказа в работе. Таким образом устройство, содержащее 10 000 транзисторов, должно иметь среднее время работы без сбоев порядка 1000 час. При эксплуатации схем с непосредственными связями у транзисторов постепенно увеличиваются коллекторный ток выключенного транзистора и остаточное напряжение на коллекторе включенного транзистора. Эти явления связаны с загрязнением поверхности полупроводника. За счет низкоомных сопротивлений во входной и выходной цепях включенного транзистора емкостные помехи, для схем с непосредственными связями не опасны. Наиболее опасными для рассматриваемых схем являются помехи индуктивного характера в соединительных проводах и шине «земли», так как величина управляющих сигналов весьма мала. При использовании германиевых транзисторов максимально допустимая величина этих помех не превышает 25 *мв*, что составляет 10% от величины управляющего сигнала. Уменьшение индуктивности шины «земли» требует весьма тщательного конструирования субблоков и всего устройства и применения специальных фильтров. Необходимо обращать внимание также и на помехи за счет изменения переходных сопротивлений контактов разъемов. Отсюда следует, что желательно как можно большее число транзисторов размещать на одной плате (для ряда случаев на одной плате размещаются до 200 транзисторов) и сокращать число разъемов. Из-за значительного роста коллекторного тока выключенного транзистора с повышением температуры применение схем с непосредственной связью, использующих германиевые транзисторы, ограничивается температурой +40°, а кремниевые транзисторы — +125°. Малые мощности, рассеиваемые рассматриваемыми схемами, дают возможность просто осуществлять их термостатирование. За счет увеличения сопротивления базы ($r_б$) и коэффициента усиления по току ($h_э$) при повышении температуры уменьшается быстродействие схем с непосредственной связью. При пониженных температурах рассматриваемые схемы работают хорошо за счет взаимной компенсации действия уменьшения коэффициента усиления по току и тока коллектора выключенного транзистора. При использовании кремниевых транзисторов бо́льшие области надежной работы схем с непосредственной связью получаются при повышении окружающей температуры. Проведение профилактического контроля схем с непосредственными связями затруднено наличием всего лишь одного напряжения питания. Для профилактики приходится питание транзисторов триггеров осуществлять от двух различных источников. Это несколько увеличивает чувствительность схем к помехам по цепи питания. Для любых логических схем на основе рассмотренных элементов требуется всего один тип транзистора и две величины сопротивлений. Малое число деталей приводит к малому числу паек. Полная стоимость специализированных устройств на схемах с непосредственными связями, несмотря на значительно большое число транзисторов, примерно равна стоимости аналогичных устройств на элементах с R—C связями. Это объясняется простотой проектирования схем с непосредственными связями, сведения до минимума времени монтажа и наладки. В силу своих характеристик устройства на схемах с непосредственными связями должны в первую очередь использоваться там, где первоочередным является сокращение объема оборудования и потребляемой им мощности. А. Б. Залкинд

3 В250. Комплексные элементы с использованием логических схем с непосредственными связями на униполярных полупроводниковых триодах. Wallmark J. T., Marcus S. M. Integrated devices using directcoupled unipolar transistor logic. «IRE Trans. Electron. Comput.», 1959, 8, № 2, 98—107 (англ.)

Описаны логика построения схем с непосредственными связями на униполярных полупроводниковых триодах для вычислительных машин и особенности изготовления комплексных элементов на основе униполярных триодов. Эти триоды имеют большее быстродействие, чем обычные биполярные, они менее чувствительны к ложным сигналам и шумам, допускают изготовление очень миниатюрных комплексных элементов. Рассматриваемые триоды имеют следующие размеры: площадь кристалла (и перехода) 0,5×0,5 *мм*, ширина канала 25 *мк*, высота канала 12,5 *мк*. При таких размерах два состояния — открыто и закрыто — обеспечиваются напряжениями на управляющем электроде 5 и 15 *в* соответственно, а ток насыщения этого электрода меньше 1 *мка*. Выходной сигнал 10 *в* на нагрузке 4000 *ом*. Можно изготавливать триоды p^+—n-типа и n^+—p-типа, отличающиеся полярностью управляющих и питающих напряжений; триод одного типа может управлять работой триода другого типа. Можно построить схему ИЛИ, объединяя параллельно каналы нескольких триодов одного типа; последовательное включение каналов позволяет построить схему И. Приведены схемы И, ИЛИ, запоминающей ячейки, полусумматора, дешифратора. С точки зрения быстродействия, триоды лучше изготовлять из германия с малым удельным сопротивлением; с точки зрения малогабаритности — лучше брать кремний с большим сопротивлением, но относительно легче изготовлять их из материала с малым сопротивлением. Сложные схемы можно изготавливать единым технологическим методом, причем необходимые внешние линейные и нелинейные сопротивления в схемах заменяются сопротивлением материала полупровод-

ника. Описана технология изготовления однослойных и многослойных комплексных схем с использованием метода диффузии, фрезерования, травления и специальных печатных межслойных плат. Униполярные триоды обеспечивают хорошую развязку между входом и выходом, что упрощает построение схем. Быстродействие схемы с одним триодом — около 30 *мгц* (задержка 30 нсек. на каскад); параллельное объединение триодов снижает быстродействие. Приведены условия стабильности работы триода по постоянному и переменному току.

В. К. Зейденберг

3 В251. Использование индуктивного управления в схемах вычислительных машин. Carey William M. Using inductive control in computer circuits. «Electronics», 1959, 32, № 38, 31—33 (англ.)

Обсуждаются преимущества использования индуктивности в качестве элемента, на котором происходит временно́е запоминание в схемах с времязадающими функциями, выполненных на полупроводниковых триодах. В схемах на электронных лампах, управляемых напряжением, элементом, который задает промежутки времени, обычно является емкость. Транзисторные схемы, как правило, управляются током; применение здесь индуктивностей упрощает расчет схем, обеспечивает взаимозаменяемость триодов. Приводятся принципиальная схема узла, формирующего импульс заданной длительности из единичного скачка напряжения на входе, схема одноходового мультивибратора, свободно идущего мультивибратора. Описано применение в двухкаскадных и многокаскадных схемах линейного трансформатора. Схема с трансформаторным запоминающим элементом имеет улучшенный передний фронт сигнала и сниженное время спада при медленно работающих типах триодов. Выведено соотношение длительностей импульсов на коллекторах свободно идущего мультивибратора, которое оказалось равным коэффициенту трансформации линейного трансформатора. Описаны счетчик, в котором вместо обычного сердечника с прямоугольной петлей гистерезиса использован линейный трансформатор, и регистр сдвига с возможностью сдвига кодом в прямом или обратном направлении или перегруппировки информации произвольным способом в течение одного такта. Все схемы построены на триодах 2N247 и диодах 1N249. Схемы использованы в серийных вычислительных системах и показывают хорошие эксплуатационные свойства.

Е. Ф. Бережной

3 В252. Применение алгебры логики к двоичной технике. Часть 3. Применение логических схем для цифрового вычислительного устройства. Soubies-Camy Henri. L'algèbre logique appliquée aux techniques binaires. 3-e partie. Les circuits logiques appligués aux calculateurs numériques. «Automatisme», 1958, 3, № 11, 423—429 (франц.)

Части 1, 2 см. РЖМат, 1960, 4990, 7338, 7339. Обосновывается целесообразность выбора для вычислительных машин двоичной системы счисления. Приводятся пересчетные схемы с основаниями систем счисления — 2, 10, 12, на триггерах; и с основаниями — 2, на газоразрядных лампах с холодным катодом, на ферритовых сердечниках и динамических элементах.

Н. Н. Поснов

3 В253. Логическая схема цифровой вычислительной машины HIPAC Mc-1. Каясима, Такада, Симада. «Хитати хёрон, Hitachi hyoron», 1958, спец. вып. № 27, 71—81 (японск.)

Описание логической схемы японской цифровой вычислительной машина «HIPAC Mc-1» средней скорости (время выполнения операций—миллисекунды), построенной в 1956 г. Приведены коды, список команд машины, логическая схема, примеры небольших программ.

3 В254. Использование матрицы сдвига в высокоскоростных цифровых вычислениях. Estrin Gerald. The Shiftrix — machine organization for high—speed digital computation, «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958, N T-107. New. York, 1959, 207—211 (англ.)

Рассматривается применение матрицы сдвига (м. с.) в арифметическом устройстве вычислительной машины (в. м.). В первой части рассматривается использование м. с. для сокращения времени умножения. Общая схема такого множительного устройства с м. с. на любое количество разрядов приведена на рис. 1. На рис. 2 приво-

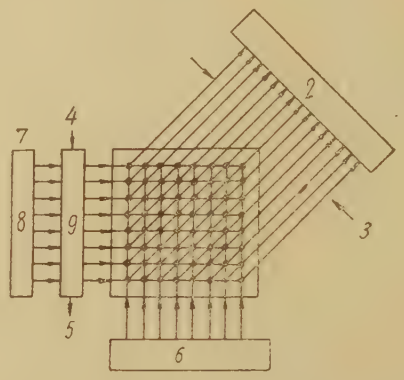


Рис. 1: 1. Множительное устройство с матрицей сдвига. 2. Аккумулятор ($2n$ двоичных разрядов). 3. $2n-1$ выходных шин. 4. Начать умножение. 6. n — разрядное множимое. 7. n—разрядный множитель. 8. Управление

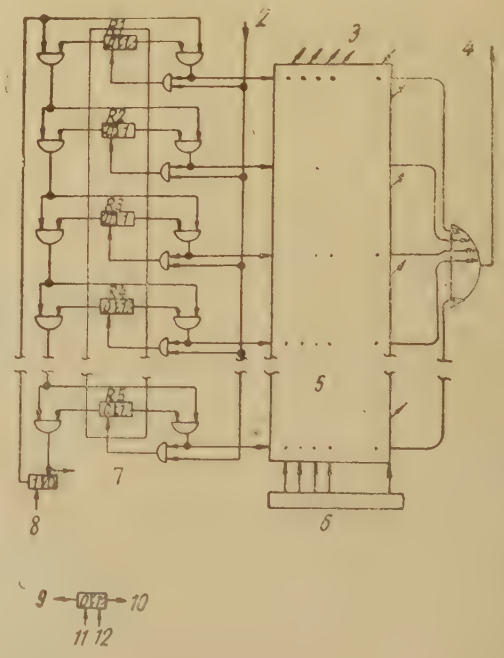


Рис. 2: 1. Управление множительным устройством с матрицей сдвига. 2. Сигнал окончания сложения. 3. В-аккумулятор. 4. Сигнал сложения. 5. Матрица сдвига. 6. Регистр множимого. 7. Сигнал окончания для центрального управления. 8. Умножить. 9. Управляет цепью 0. 10. Управляет цепью 1. 11. Установить 0. 12. Установить. 1.

дится более детальная схема управления, позволяющая организовать переменный цикл умножения, определяемый лишь ненулевыми разрядами множителя. Сигнал сложения распространяется по цепочке управления сверху вниз, задавая сложение с содержимым аккумулятора значения множителя, сдвинутого на количество разрядов, определяемого разрядом множителя, в котором на-

ходится очередная единичка. Сигнал окончания сложения в аккумуляторе осуществляет переход к следующей единичке множителя и т. д. до прохождения всего множителя. Время, требуемое для каждого сложения, может быть сокращено известными методами параллельного возбуждения переносов и определения их окончания, параллельного распространения переносов, исключения переносов путем отдельного хранения переносов до заключительного шага. Само количество сложений, определяемое количеством единичек в множителе может быть сокращено путем преобразования множителя. Показывается, что в случае использования м. с. и триадной кодировки множителя среднее время выполнения умножения будет определяться формулой: $t=\frac{n}{3}t_A+t_p$, где t_A — время выполнения сложения, n — количество разрядов, а t_p — время распространения сигнала по цепочке управления. Во второй части кратко рассматриваются возможности использования расширенной матрицы сдвига (со сдвигом в обоих направлениях) для сокращения времени выполнения операций сдвига, нормализации, деления, преобразования из двоичной формы в двоично-десятичную и обратно, операций с плавающей запятой — умножения, деления, сложения и вычитания. В третьей части весьма кратко обсуждаются достоинства и недостатки различных вариантов физической реализации м. с. в зависимости от свойств всей системы, в которой она действует.

В. И. Смирнов

3 В255. Криотроны и другие сверхпроводящие элементы цифровых вычислительных машин. Lock J. M. Cryotrons and other superconducting computer devices. Recent advances, «Research», 1960, **13**, № 2, 49—54 (англ.)

Описаны физические принципы, которые лежат в основе устройства и работы элементов, использующих сверхпроводимость в металлах и сплавах при низких температурах и разрушение сверхпроводимости магнитным полем или током. Приведены сведения о криотроне, который состоит из сверхпроводящего соленоида из ниобия ($T_к=8°K$) и проходящего по центру соленоида цилиндрического проводника из тантала ($T_к=4{,}4°K$), помещенных в жидкий гелий. Состояние сверхпроводимости центрального проводника может быть разрушено полем тока, текущего в обмотке соленоида. Соленоид всегда остается сверхпроводящим. Криотрон является активным элементом. Коэффициент усиления тока в криотроне равен нескольким единицам. Основной недостаток криотрона — большое время переключения из одного состояния в другое, определяемое отношением индуктивности соленоида L к нормальному сопротивлению центрального проводника R и имеющее порядок 150 *мксек*. Нагрев центрального проводника джоулевым теплом, выделяющимся при переключении, и малое допустимое повышение температуры тантала (0,1°K) ограничивают рабочую частоту переключения триггерной схемы из криотронов значением порядка 1000 *гц*. Заметно лучшие данные у полоскового криотрона, который представляет собой две полоски металла, нанесенные вакуумным напылением на изолированную пленкой окиси кремния свинцовую пластину. Полоски нанесены под прямым углом друг к другу. Между ними имеется тонкий слой изоляции. Роль центрального проводника выполняет нижняя полоска из олова ($T_k=3{,}73°K$), роль соленоида — верхняя полоска из свинца ($T_k=7{,}2°K$). Магнитное поле тока, текущего по свинцовой полоске, способно разрушить сверхпроводимость участка оловянной полоски непосредственно под свинцом. Свинцовая пластина служит обратным проводом для управляющего и переключаемого токов, концентрируя их магнитное поле в весьма малом объеме. Индуктивность цепи каждого тока получается весьма малой ($\sim 10^{-11}$ *Н/см*). Основная трудность для полоскового криотрона — наличие структурных неоднородностей в напыленных пленках, что ведет к резкому снижению критического значения переключаемого тока и уменьшению коэффициента усиления тока. Экспериментально получен коэффициент усиления, равный 4 (теоретическое значение — около 30). Оценка величины L/R, определяющая скорость переключения полоскового криотрона, дает значение порядка 10^{-8} сек. Для запоминающих устройств наиболее перспективным является элемент пассивного типа. Он имеет два состояния, определяемых направлением тока сверхпроводимости в перемычке из металлической пленки, проходящей по диаметру круга, остальная площадь которого свободна от пленки. Ток перемычки замыкается по пленке, окружающей свободную часть круга. Пленка наносится испарением металла в вакууме на подложку из диэлектрика. Поверх перемычки наносится слой изоляции и параллельно перемычке с двух сторон проходят провода. Переключение элемента производится путем разрушения сверхпроводимости магнитным полем тока в проводе переключения, которое добавляется к собственному полю тока сверхпроводимости. При этом в проводе считывания наводится сигнал, а направление тока в перемычке меняется на обратное. В остальных случаях провод считывания идеально экранирован от провода переключения сверхпроводящим экраном. Критический ток зависит от ширины и толщины перемычки и температуры жидкого гелия. Скорость переключения элемента определяется константой L/R схемы и скоростью рассеивания джоулева тепла, выделяемого в перемычке при разрушении сверхпроводимости. Для элемента диаметром 2 *мм* из пленки олова с перемычкой толщиной 2000 Å и шириной 0,2 *мм* критический ток равен 0,5 *а*, индуктивность около 10^{-9} *Н*, нормальное сопротивление ~ 0,1 *ом* и $L/R\approx 10^{-8}$ сек. Скорость охлаждения перемычки характеризуется отношением $\tau_{терм.}\approx \approx C/K$, где C — теплоемкость сверхпроводящей перемычки, K — теплопроводность между перемычкой и подложкой. Теплоемкость олова при температурах жидкого гелия значительно меньше теплоемкости свинца, поэтому скорость работы элементов из олова заметно выше и близка к 10 нсек. Энергия, выделяемая при переключении одного элемента, имеет порядок 10^{-10} *дж*. При частоте обращения к памяти 50 *мгц* и переключении при каждом обращении 50 элементов выделяемая мощность составит 0,25 *вт*. Трудной проблемой является соединение элементов, находящихся в криостате, со схемами, работающими при обычных температурах.

Е. Ф. Бережной

3 В256. За устранение барьеров между специалистами по вычислительной технике. Herbert Evan. No international barriers to computer component competency. «Automat. Control», 1959, **11**, № 4, 60—62, 65—66, 68—70 (англ.)

Статья о новых путях в создании сверхбыстродействующих элементов и новых принципах построения вычислительных машин, отражающая материалы Парижской международной конференции по обработке информации, представленные частично на приуроченной к конференции выставке «AUTOMATH — 1959» Сотрудники Линкольновской лаборатории Раффел (Raffel) и Смит (Smith) сообщили о разработке устройства памяти на тонких магнитных пленках с возможным временем переключения до 10 мксек. В настоящее время скорость переключения ограничивается частотным пределом существующих триодов. Другой сверхбыстродействующий элемент предложил работник фирмы «RCA» Лиис (J. W. Leas). Этот элемент представляет собой параметрический генератор субгармоник с переключением фазы, способный клапанировать, усиливать и запоминать двоичные сигналы, выраженные колебаниями с двумя устойчивыми значениями фазы. Этот элемент позволит повысить быстродействие существующих машин на несколько порядков, что весьма важно для создания самонастраивающихся (обучающихся) систем. Отме-

чается, что наносекундная техника, идущая на смену микросекундной, выдвигает требование сокращения размера машины, который для цикла устройства памяти в 10 нансек. не должен превышать 45—60 *см* в диаметре в силу конечного времени распространения электрического сигнала. Следующий новый прибор — туннельный диод, изобретенный японским физиком Leo Esaki и уже освоенный фирмой «General Electric» (первое сообщение о диоде было в 1958 г.). Наличие участка с отрицательным сопротивлением позволяет использовать его в логических и усилительных схемах. Шведской фирмой «Facit» изготовлено устройство памяти на магнитных лентах под названием «Facit ECM 64», отличающееся оригинальной конструкцией и большим объемом памяти. Центральный диск с горизонтальной осью вращения окружен 64 бобинами с 8-канальной магнитной лентой, напоминая карусель (устройство часто называют carousel memory). Общая емкость лент 3,1 млн. букво-цифровых знаков или 5,2 млн. десятичных цифр, включая коды проверки. Западногерманские машины ER-56 используют зарубежные (США) устройства с магнитной лентой Ampex FR-300, хотя, как отмечается, это направление впервые начало развиваться в Германии. Большой интерес вызывает построение ряда узлов и машин на недавно созданном элементе — параметроне (РЖМат, 1959, 11628). Сотрудниками института Макса Планка в Мюнхене экспериментально проверена работа параметрона до частот 450 *мгц*, а теоретический предел по частоте превышает 10 000 *мгц*. Изобретатель параметрона, профессор Токийского университета Гото (Goto) сообщил, что почти половина всех вычислительных машин в Японии выполнена на параметронах. Одна из последних таких машин завершена в августе 1959 г. и имеет следующие характеристики: число параметронов 9600, система счисления — двоичная, частота возбуждения 6 *мгц*, частота синхронизации 100 *кгц*, сложение 40 мксек., умножение 340 мксек., память на магнитных сердечниках 1024 числа, потребляемая мощность 10 *квт*. Шифр машины PC-2. На выставке «AUTOMATH» были показаны новые модели японских машин, работающих на тех же принципах, HIPAC-101 и NEAC-1103. Интересно построение памяти на магнитных сердечниках в этих машинах — запись производится наложением двух токов частоты f и $f/2$, а чтение — определением фазы колебания с частотой f, возникающего в сердечнике при подаче на него токового сигнала с частотой $f/2$. Этот новый метод, называемый методом двух частот (dual frequency method), определяет особенности построения числового куба: сердечники питаются с выходом параметронов переменными токами, через сердечник проходят только две обмотки X и Y, считывание не разрушает информацию. В связи с почти неограниченным сроком службы параметронов, что, по мнению японских специалистов, связано с отсутствием диодов, монтаж машин выполняется без разъемов и съемных ячеек, непосредственным соединением цепей. Возможным «соперником» параметрона автор называет недавно разработанный в США магнитный переключатель под названием BIAX. Подчеркивается все возрастающая конкурентоспособность Японии в разработке новых машин, а также в выпуске на мировой рынок полупроводниковых триодов. Отмечаются успехи шведской промышленности. Статья хорошо иллюстрирована. А. Ф. Смирнов

3 В257. Делители частот на линиях задержки. Применение их для арифметического кодирования. Amram Y., Guillon H., Ollivier B. Démultiplicateurs de fréquence à ligne à retard. Application au codage arithmétique, «Onde électr.», 1958, 38, № 377-378, 633—640 (франц.; рез. англ.)

Рассматриваются схемы делителей частоты на линиях задержки. Указывается, что рассматриваемые схемы обладают большой надежностью в работе. Приводятся краткие описания четырех блок-схем делителей частоты, лучшая из которых работает на частоте до 50 *мгц*. Приводится схема делителя частоты, собранного на пентоде, работающего с частотой до 50 *мгц*. Затем приводится схема делителя, собранного на двух лампах и некоторые ее модификации, позволяющие довести рабочую частоту до 50 *мгц*. Указывается возможность использования делителей частоты для кодирования. Используя четыре делителя частоты с коэффициентами деления m, соответственно равными 1, 2, 4, 8, получаем возможность закодировать первые шестнадцать цифр в обычной двоичной системе (см. рис. 1). Таким образом, с помощью n каналов мы получаем $N=2^n$ двоичных позиций. Говорят, что N есть емкость системы. Применение обычного двоичного кода приводит, однако, к весьма серьезному ограничению. При емкости системы $N=64$, $n=6$ коэффициент деления m в одном из каналов должен быть равен 32, а это есть предельная возможность рассматриваемых схем делителей частоты. Предлагается особый код, который при $N=120$ требует восьми каналов и трех делителей частоты с $m=3$, 4, 5. На рис. 2 приведен особый код. На рис. 3

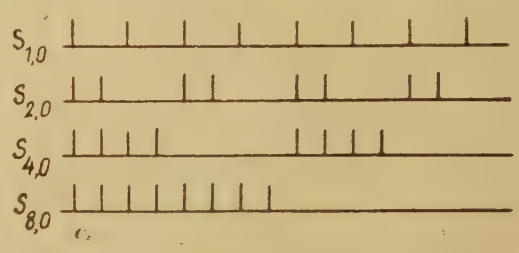


Рис. 1

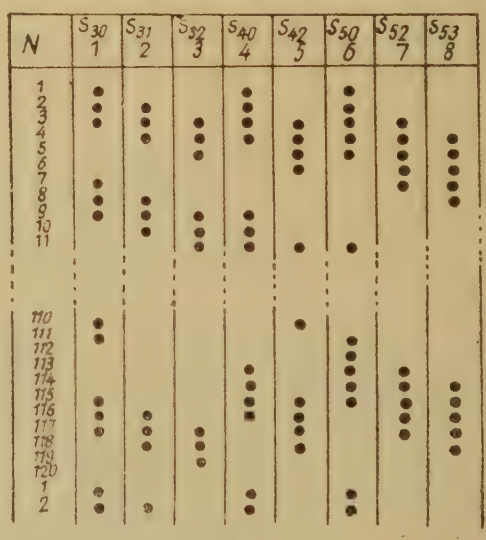


Рис. 2

приведена схема, вырабатывающая особый код (CD — схема делителя, AC — схема несовпадения). Запускающий импульс E_0 перебрасывает триггер и открывает путь импульсам от задающего генератора к трем делителям частоты. Импульсы от делителей частоты либо непосредственно, либо через линии задержки поступают в соответствующие каналы. В конце цикла при $N=120$ схема несовпадения перебрасывает триггер в исходное состояние и заканчивает цикл. Рассматривается вопрос надежности запуска и остановки схемы. Н. Н. Поснов

К реф. 3В 257

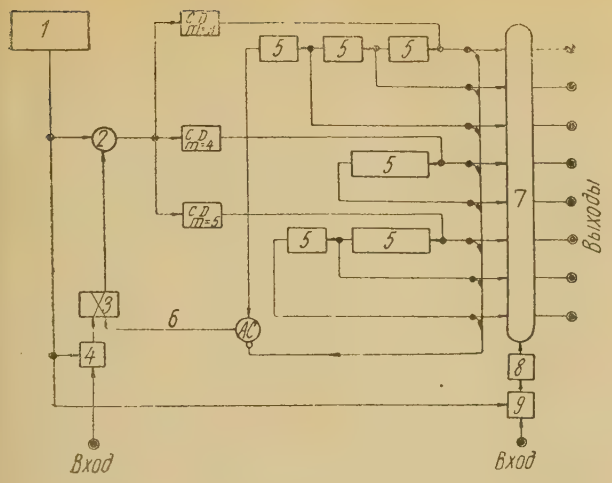
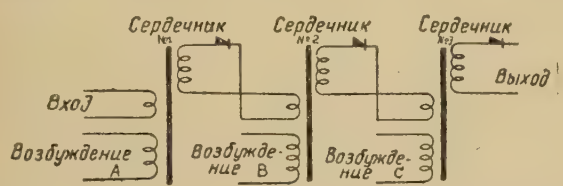


Рис. 3

3 В258. Применение материалов с прямоугольной гистерезисной петлей в схемах вычислительных машин. Holt A. D. The application of square hysteresis loop materials in digital computer circuits. «Electron. Engng», 1958, **30**, № 362, 196—199 (англ.)

Рассматриваются некоторые случаи использования магнитных материалов в вычислительных машинах. Приводятся диаграмма последовательности импульсов для отбора ферритовых сердечников и диаграмма выходных напряжений. Предлагается несколько схем сдвигающих регистров с использованием ферритовых сердечников и германиевых диодов; схемы отличаются количеством сердечников на 1 знак запасаемой информации. На рисунке приведена основная схема сдви-



гающего регистра с 3-мя сердечниками на 1 знак информации. Если все три сердечника находятся в состоянии насыщения — B, то последовательное их возбуждение импульсами A, B, C не изменит их состояния. Если же сердечник № 2 находится в состоянии $+B$, а № 1 и № 3 в состоянии $-B$, тогда возбуждение сердечника № 2 импульсом B, переведет его в состояние $-B$, при этом импульс напряжения с выходной обмотки сердечника № 2 попадает на входную обмотку сердечника № 3 и переводит его в состояние $+B$, т. е. 1 (единица) из сердечника № 2 передалась в 3-й. Чтобы предотвратить возбуждение сердечника № 1, через входную обмотку сердечника № 2, можно сделать следующее: 1) подавать импульс возбуждения одновременно на сердечники № 1 и № 2; 2) включать диоды во входные цепи; 3) выбирать такое соотношение витков входной и выходной обмоток, чтобы обратный ток был меньше, чем $^1/_2$ тока, необходимого для переключения.

Приводится схема регистра с одним сердечником на единицу информации. Указывается как должны выглядеть практические схемы регистра с учетом возможного разброса параметров. Сдвигающие регистры описанного типа могут работать на частоте до нескольких сот килогерц. В них использованы сердечники с внешним диаметром 2 *мм*. В процессе наладки с помощью осциллографа подбирают величины переменных сопротивлений так, чтобы формы импульсов напряжений были идентичными. Описываются возможные варианты запоминающих устройств на магнитных сердечниках: последовательные — по принципу сдвигающих регистров и параллельные. Отмечается, что с увеличением объема памяти запоминающее устройство последовательного типа становится экономически невыгодным, ввиду сложной системы адресных устройств. Предлагается два варианта запоминающего устройства параллельного типа: 1) число представляется одним разрядом в каждой сетке; 2) число запоминается сердечниками одного ряда в сетке. Во втором варианте импульсы возбуждения поступают только к кольцам выбранного числа, так что при считывании помехи отсутствуют и отпадает необходимость в стробировании. Предлагается также параллельно-последовательная система ферритовой памяти с ферритовым и транзисторным управлением для последовательной машины с объемом памяти от 10 до 100 чисел. Приводится схема такой системы и ее описание. З. Д. Доброхотова

3 В259. Система на магнитной ленте с быстрым доступом с фиксированными адресами, объединенная с цифровой вычислительной машиной. Best R. L., Stockebrand T. C. A computer-integrated rapid-access magnetic tape system with fixed address, «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 42—46 (англ.)

Для цифровой вычислительной машины ТХ-2 Линкольновской лаборатории Массачузетского технологического института запланировано использование внутренней библиотеки — системы на магнитной ленте. До ста лентопротяжных механизмов управляются центральной электронной системой. Библиотека будет иметь емкость хранения 10^{10} двоичных ячеек и время доступа около 30 сек., что достаточно хорошо сочетается с цифровой вычислительной машиной ТХ-2, имеющей большое быстродействующее ферритовое запоминающее устройство емкостью 2,5 млн. ячеек. Лентопротяжные механизмы управляются электронными схемами, полностью объединенными с самой цифровой вычислительной машиной. На каждой ленте предусмотрена синхронизирующая дорожка, обеспечивающая возможность получения адресуемых ячеек и переменной скорости следования информации. Лентопротяжный механизм не содержит ведущего ролика, в нем применены три обычных трехфазных двигателя для протяжки ленты в любом направлении. Система управления изменяет скорость вращения изменением момента приводного двигателя после сравнения скорости поступления с ленты синхронизирующих импульсов с желаемой скоростью их следования. Этим способом вычислительная машина может выбрать соответствующую скорость записи данных в масштабе реального времени в течение заданного периода. Поиск информации может производиться с любой скоростью вплоть до 25 *м/сек*. Скорости чтения-записи составляют от 0,75 до 2,5 *м/сек*, а время ускорения от 0,5 до 1,5 сек. Высокая надежность передачи информации обеспечивается за счет использования пяти спаренных дорожек на ленте. При десятидорожечной головке три дорожки являются информационными, одна дорожка синхронизирует слоги и еще одна синхронизирует зоны. Поскольку амплитуда сигнала чтения является переменной из-за переменной скорости протяжки ленты, чтение осуществляется в основном по полярности изменения потока. Одной из особенностей машины ТХ-2 является возможность быстрого перехода ее системы управления от одного блока к другому, так что после подачи команды одному из лентопротяжных механизмов машина переходит к работе с другим лентопротяжным механизмом до тех пор, пока первый не подаст сигнал о достижении заданного режима.

Другой особенностью машины ТХ-2 является наличие большого быстродействующего запоминающего устройства, которое может хранить большие блоки информации и которое может быть использовано в качестве буфера во время ускорения ленты. Лентопротяжные механизмы, используемые в данной системе, исключительно просты. Они содержат блоки головок чтения-записи, две бобины, два приводных мотора и ведущий мотор. Для ускорения ленты до скорости 0,75 *м/сек* требуется 0,5 сек. и 180 *мм* ленты. Направление движения ленты определяется специальным чувствительным устройством, смонтированным на оси одного двигателя и возбуждающим ртутный переключатель. Управление двигателями производится без снятия напряжения, что обеспечивает натяжение ленты. Схема управления выполнена полностью на транзисторах. Окончание ленты контролируется фотоэлементами, установленными с обеих сторон лентопротяжного механизма. Для засвечивания фотоэлементов на концах ленты предусмотрены специальные отверстия. С целью обеспечения замкнутой системы регулирования введена обратная связь по моменту. Логика контроля скорости движения и сравнения ее с заданной основана на использовании синхронизирующих импульсов с ленты, запускающих три фиксированных задержки во времени, по отношению к которым контролируется положение синхронизирующих импульсов. Чтение и запись информации осуществляется по полярности изменения потока. Используются усилители с большим коэффициентом усиления, однако постоянства его не требуется. На выходе усилителя установлен триггер Шмидта, который формирует выходной сигнал, являющийся стандартным для использования его в логических схемах цифровой вычислительной машины ТХ-2.

Г. Х. Новик

3 В260. Автоматическое цифровое записывающее устройство для синхронизации последовательных событий. Block Stanley M. An automatic digital recorder for timing sequential events. «IRE Trans. Med. Electron.», 1959, **6**, № 3, 157—159 (англ.)

Автоматическое цифровое устройство типа СЕМТАР (SEMTAR) автоматически записывает данные временных интервалов в такой форме (перфолента), которая может быть использована для ввода в различные коммерческие преобразующие и вычислительные устройства. СЕМТАР был разработан для исследования движения, например, рук при письме, когда изучается серия элементов движения в повторяющихся рабочих циклах. Он позволяет записать и отметить последовательные относительно короткие (менее одной секунды) временные интервалы в коде вычислительной машины. СЕМТАР может быть применен в ряде медицинских и биологических исследований, обеспечивая запись заданных максимальных условий (температура, давление, усилие и т. д.) и временных интервалов, в течение которых эти максимальные условия имеют место. Транзисторный вариант конструкции СЕМТАР размещается в небольшом чемодане, питается от сети 115 *в* 60 *гц*. Он состоит из главного синхронизирующего блока (генератора), вводных (считывающих) блоков, электронных переключателей, двух пар электронных счетчиков, устройств опознавания, кодирующих и усиливающих блоков и перфоратора бумажной ленты. Генератор может выдавать частоты 100, 500 или 1000 *гц* в зависимости от требуемых промежутков времени и требуемой точности. Временные интервалы определяются импульсами счета от трехразрядных счетчиков, использующих декатроны. Существующая модель перфорирует со скоростью 3600 слогов в 1 мин. и записывает от 4 до 7 разрядов для каждого события. Необходимость синхронизации или записи одновременных событий также предусмотрена в конструкции, которая может быть легко видоизменена для обеспечения возможности записи данных на магнитную ленту, если большее быстродействие, получаемое при этом, окупается дополнительной стоимостью и сложностью. В настоящее время СЕМТАР обеспечивает запись данных либо на 5-, либо на 7-канальную бумажную ленту. Перевод перфорированных данных в печатную форму может быть выполнен автоматической пишущей машинкой с управлением от ленты; преобразование данных с ленты на перфокарты для сортировки, анализа распределения частот, составления списков, или для производства вычислений на счетных устройствах, может быть легко произведено на обычных перфорирующих устройствах. Временные интервалы, которые может измерять СЕМТАР, простираются от 1/10 сек. до 16 мин. При относительно небольшом количестве внешнего оборудования можно измерять времена реакций на различные стимуляторы, или промежутки времени, в течение которых значения температур, давлений, усилий, потенциалов и т. д. превышают заданные значения. При необходимости данные могут контролироваться круглосуточно по заданной программе.

Г. Х. Новик

3 В261. Особенности больших внешних запоминающих устройств на магнитных поверхностях для больших цифровых вычислительных машин. Postley John A. Contrasts in large file memories for large-scale computers, «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 193—194 (англ.)

Большие внешние запоминающие устройства на магнитных поверхностях могут содержать до 50 млн. буквенно-числовых слогов информации. Эти запоминающие устройства могут быть с последовательной выборкой информации или с произвольным доступом. Последовательную выборку, как правило, имеют запоминающие устройства на магнитной ленте внутри каждой зоны. Однако можно считать, что доступ к самим зонам является произвольным. Время выборки в таких системах может простираться от нескольких минут до нескольких часов. К внешним запоминающим устройствам с произвольным доступом относятся запоминающие устройства на магнитных барабанах или магнитных дисках, причем время доступа может колебаться от нескольких миллисекунд до 1 сек. Увеличение емкости запоминающего устройства с последовательной выборкой, в частности на магнитной ленте, достигается весьма просто и дешево (путем увеличения катушек с лентой), в то время как увеличение емкости запоминающего устройства с произвольным доступом может быть осуществлено довольно сложным путем. Кроме того, на ленте возможна запись информации с переменной длиной слова, в то время как в запоминающем устройстве с произвольным доступом это невозможно. Управление (в частности поиск) внешним запоминающим устройством с произвольным доступом несколько более сложно, нежели управление внешним запоминающим устройством с последовательной выборкой. С другой стороны, запоминающие устройства на магнитной ленте больше подвержены потере информации, нежели запоминающие устройства с произвольным доступом. Между обоими типами внешних запоминающих устройств нет резкой границы. Одно из них является частным случаем другого.

Г. Х. Новик

3 В262. Методы организации магнитного запоминающего устройства для эффективного использования магнитного запоминающего устройства машины РАМАК фирмы «ИБМ». Heising W. P. Methods of file organization for efficient use of IBM RAMAC files, «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 194—196 (англ.)

Внешнее запоминающее устройство машины РАМАК фирмы «ИБМ» представляет собой память на магнитных дисках с исключительно хорошими характеристиками, позволяющими использовать машину для обработки широкого класса коммерческих задач. Система обработки нужно разрезать данную заготовку таким образом, личающихся друг от друга вариантах: РАМАК-305 и 650.

В системе РАМАК-650 используется магнитное запоминающее устройство типа 355, емкостью 6 млн. слогов, размещаемых на 50 дисках, смонтированных на вертикальном валу, вращающемся со скоростью 1200 оборотов в 1 мин. Диски покрыты с обеих сторон магнитным материалом и отделены друг от друга для того, чтобы обеспечить вход головкам чтения-записи, смонтированным на горизонтальных рычагах. Рычаг может быть установлен в одно из 100 радиальных положений для того, чтобы прочесть или записать информацию на одной из 100 дорожек с каждой стороны диска. Рычаги двигаются также в вертикальном направлении от одного диска к другому. Поверхность каждого из дисков имеет по 100 дорожек, каждая из которых, в свою очередь, содержит 60 слов (10 десятичных слогов плюс знак). Число рычагов — три. Все они могут работать одновременно. Но поскольку каждый рычаг осуществляет передачу информации между запоминающим устройством и отдельным буферным ферритовым запоминающим устройством, имеющим емкость 600 слогов, только один рычаг может передавать информации в данный момент. Передачи всегда осуществляются блоками по 600 слогов (полная дорожка). К системе 650 может быть подсоединено до четырех запоминающихся устройств на дисках общей емкостью до 24 млн. слогов. Система может иметь также запоминающее устройство на магнитной ленте. Основными инструкциями, используемыми для работы с дисками, являются: «поиск», «чтение», «запись». Время поиска зависит от числа дисков и дорожек, через которые должен пройти рычаг. Среднее время поиска между произвольными ячейками составляет 0,6 сек. Среднее время поиска между ячейками на одном и том же диске равно 0,160 сек. Соседние дорожки могут выбираться через 0,080 сек. Операция записи требует 135 мсек., а чтение 110 мсек. Запоминающее устройство на дисках РАМАК характеризуется возможностью простого добавления, изменения и уничтожения информации. Важной задачей, которая решается на дисках, является задача по заданной части записи и заданному ключу найти полную запись. Скорость передачи информации между запоминающим устройством и центральной системой обработки данных составляет 600 слогов в 1 сек. На запись в произвольную ячейку в среднем тратится около 1 сек. Запись осуществляется слогами по 100÷200 слогов. В тех случаях, когда требуется произвести записи группами более 600 слогов, работа осуществляется по программе и система несколько усложняется. Для устранения ошибок используется периодическое гашение всего запоминающего устройства. Г. Х. Новик

3 В263. СПИТ — устройство выборочной печати информации, записанной на ленте.—. Computer outputs to use SPIT. «Automat. Control.», 1959, **10**, № 6, 61—62 (англ.)

Сообщается о выходном устройстве для вычислительных машин, разработанном консультативным объединением в Филадельфии, которое может быть присоединено к высокоскоростному печатающему устройству для выполнения операций поиска, выборки и печати беспорядочно расположенной информации, записанной на магнитной ленте. Устройство СПИТ с помощью опознавательного кода позволяет выполнять выборку любого раздела информации, записанной на ленте, сравнение каждого кода информации с выборочным кодом и критерием, выборку разделов информации соответствующих данному коду и выбранному критерию; печать всех или части выбранных разделов на формате или по образцу. В устройстве СПИТ алфавитные, цифровые, алфавитно-цифровые выборочные знаки могут коммутироваться и адресоваться в специальные адреса разделов информации, которые должны быть найдены. Критерий выбора включает следующие коды: «равный», «неравный», «больше чем», «меньше чем», комбинации того и другого; комбинации «и», «или»; комбинации выборочного кода. Когда устройство работает в соединении с электронным высокоскоростным печатающим устройством; все разделы информации, записанные на ленте, код которых соответствует выборочному критерию, скоммутированному в блоке устройства, будут печататься на большой скорости; все другие разделы будут считываться, но не будут печататься. Скорость работы увеличивается на 100% при выполнении операции «считывать не печатать». Возможность автоматического поиска или восстановление статей информации в накопителе на магнитной ленте исключает необходимость в затрате времени на программирование и отладку программы для нормального порядка выборки, связанного с большинством операций по содержанию картотеки.

А. С. Вавилова

3 В264. Оборудование для перемещения и намотки ленты. Welby B. G. Tape driving and spooling equipments. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 450—451. Discuss., 453—454 (англ.)

Аннотация доклада, прочитанного в институте инженеров-электриков на совещании по новым устройствам цифровых вычислительных машин. Устройства для считывания данных с бумажных перфолент были впервые сконструированы десять лет тому назад для использования в телепринтерах и работали со скоростями 10 знаков в 1 сек. Применение считывающих устройств в электронных вычислительных машинах потребовало значительного увеличения скорости и появились устройства, позволяющие считывать данные со скоростью от 200 до 1000 знаков в 1 сек.; зубчатые механизмы подачи ленты заменяются приводами от сервомеханизмов, и считывающие устройства вместе с оборудованием наматывания и передвижения ленты помещаются в отдельные шкафы. В докладе рассматриваются принцип действия и основные схемы узлов фотоэлектрического считывающего устройства. Конструкция объектива этого устройства разрешает подавать для считывания любую из трех стандартных типов лент различной (до 8 каналов) ширины, а также позволяет остановить ленту при полной скорости ее движения в 2540 *мм/сек*, предусмотрена возможность работы устройства без намотки коротких отрезков лент на бобины. Лента помещается в вакуумной коробке, расположенной между катушкой и считывающей головкой; количество ленты, содержащейся в каждой коробке, регулируется фотоэлектрическими элементами, выходные сигналы которых возбуждают поле обмоток соответствующих сервомоторов механизмов подачи. Рассматриваются основные элементы схемы, обеспечивающей движение ленты за считывающей головкой, которая управляется механизмом подачи ленты; последний может ускорить или замедлить движение ленты на 1 мсек. при скорости 2540 *мм/сек*; рассматривается принцип действия привода с малой инерцией и фрикционного дискового тормоза; в докладе излагаются основные вопросы, связанные с проектированием этого приводного узла А. С. Вавилова

3 В265. Субакустические линии задержки. Ч. I. Borský Vladimír, Matyáš Josef. Subakustické zpožďovací linky. Č. I. «Stroje zpracov. inform.», 1958, № 6, 83—114 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описан принцип построения линии задержки, основанный на использовании математической модели однородной линии без потерь, состояние которой после выключения электрического тока можно определить одним из двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

где $u=u(x,\ t)$ — напряжение, x, t — пространственная и временная координаты, v — постоянная (уравнение для распространяющейся бегущей волны и обычное волновое уравнение). Указаны начальные и краевые условия, при выполнении которых не возникает отраженная волна и при которых данная функция времени $f(t)$ (краевое условие) воспроизводится с требуемым запаздыванием. Дифференциальные уравнения (1) и (2) аппроксимируются подходящими системами обыкновенных дифференциальных уравнений; для них предполагается схема коммутации электронного дифференциального анализатора непрерывного действия, которая превращает стандартный дифференциальный анализатор без каких-нибудь изменений его структуры в линию задержки с удобными свойствами. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, соответствующей уравнению (2), предлагается, для экономии усилителей, цепь с одним усилителем постоянного напряжения для интегрирования дифференциального уравнения 2-го порядка

$$p^2 U_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k U_k$$

(p — дифференциальный оператор); таким образом общее число требуемых усилителей понижается приблизительно на $^1/_3$ по сравнению с обычным способом коммутации. Наконец, производится анализ фазовой частотной характеристики; оказывается, что достижимая точность такой линии задержки при частотах до 1,8 составляет около 5%, а время задержки доходит до нескольких десятков секунд. S. Maloň

3 В266. Входные, выходные и запоминающие устройства вычислительных машин. Raab Adolf. Funktionsgruppen datenverarbeitender Systeme. «STT-Techn. Mitt.», 1959, № 2, 23—28 (нем., рез. англ.)

Приводится краткий обзор и классификация перфоленточных, перфокарточных устройств и магнитных барабанов электронных вычислительных машин для обработки данных, а также приспособлений для установки перфолент на входные и выходные устройства этих машин.

Приводятся основные технические характеристики и назначение устройств, изготовляемых рядом фирм.

А. С. Вавилова

3 В267. Быстродействующий ленточный перфоратор. Turner F. L. A high-speed paper-tape punch. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 451. Discuss., 453—454 (англ.)

Аннотация доклада, прочитанного в институте инженеров-электриков на совещании по новым устройствам цифровых вычислительных машин. Отмечается, что перфолента является одним из видов общего машинного языка и поэтому создается большое количество ленточных перфораторов, скорость пробивки которых составляет от 7 до 50 знаков в 1 сек. Однако, скорость этих перфораторов не удовлетворяет всех возможностей вычислительных машин. Сообщается об изготовлении перфоратора с параллельно действующими вводами для пробивки данных на 5-, 6-, 7- или 8-дорожечных лентах со скоростью 300 знаков в 1 сек.; перфоратор снабжен синхронизирующими контактами для подачи сигнала о готовности перфоратора получить очередные данные от вычислительной машины. Для продвижения ленты и последовательной передачи знаков создано специальное устройство. Несмотря на усилия, направленные на достижение надежности конструкций, высказывается пожелание снабдить перфоратор контрольным устройством для считывания пробивок с ленты и сравнения их с соответствующими входными сигналами.

А. С. Вавилова

3 В268. Быстродействующий цифровой индикатор. Инада. «Кэйсоку, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, 8, № 11, 767—768 (японск.; рез. англ.)

Краткое описание индикатора, дающего изображения цифр на экране электронно-лучевой трубки. Индикатор дает 15 цифровых таблиц в 1 сек. из 100 цифр каждая.

3 В269. Устройство построения графиков для цифровой вычислительной машины «Бендикс». Накамура. «Кэйсоку, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, 8, № 11, 762—763 (японск.; рез. англ.)

3 В270. Система составления и обработки комплекса данных испытательных полетов. Higgins S. F. A system for editing and computor entry of flight test data. «IRE Trans. Space Electron. and Telemetry», 1959, 5, № 3, 123—131 (англ.)

Автоматизация обработки сведений о поведении новой конструкции самолетов в испытательных полетах при помощи описываемой системы фирмы «Консолидейтед электродинамикс» позволила сократить время обработки данных с 237 до 58 час. и расширить возможности анализа результатов полетных испытаний. В задачу системы входит: поиск полетных данных на магнитных лентах, регистрация по временному признаку, регистрация по каналу, регистрация по блокам информации на ленте, калибровка. Система является по существу вычислительной станцией. Она получает данные, уже записанные на магнитных лентах непосредственно на самолете или промежуточных станциях. На лентах имеется 16 дорожек с плотностью записи порядка 40 импульсов на 1 *мм*. Скорость движения лент переменна и лежит в пределах от 14 до 140 *см/сек*. Поиск осуществляется на скорости 250 *см/сек*, быстрая перемотка в прямом и обратном направлении — на скорости 375 *см/сек*. В самолетное оборудование входят два типа переключателей, передающих аналоговые величины на вход импульсного цифрового устройства 10-канальные и 100-канальные. Цифровой код состоит из 11 разрядов величины и ее знака, одного разряда для контроля четности, одного маркерного разряда. Эта информация в последовательной форме передается через телеметрический передатчик на землю, причем в начале и в конце каждого слова добавляется по одному разряду. Слова объединяются в блоки, также снабженные специальными кодовыми признаками. Для перевода кода в аналоговую форму с последующей записью на шлейфовом осциллографе служат 12 преобразователей. Изображение появляется через 50 мсек. от начала процесса проявления. Один из каналов используется для записи времени через каждые 2,56 сек. истинного времени. Код времени используется и для селективного управления узлами магнитной ленты. Для визуального наблюдения предусмотрен вывод данных на экраны пяти электронно-лучевых трубок с общим объемом 100 каналов. В статье кратко описаны порядок работы оборудования системы при выполнении различных задач и особенности совместной работы с машинами последовательного действия серии ИБМ-700. Для согласования во времени магнитных лент и машины используется буферная память на магнитных сердечниках на 1092 числа по 6 разрядов плюс разряд для контроля четности. Имеется блок-схема системы, фото печатных схем с транзисторной техникой, расположение данных в блоке информации, запись данных на фотобумаге, общий вид вычислительных установок. А. Ф. Смирнов

3 В271. Ассимилятор данных, обрабатываемых в реальном масштабе времени. Gschwind Hans W. A real time data assimilator. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 7, 33—36 (англ.)

Описывается идея применения «ассимилятора данных» (data assimilator), заключающаяся в том, что входные данные, подлежащие обработке цифровой машиной, вводятся в запоминающее устройство непосредственно (без участия ее блока управления и арифметического устройства). Применение ассимилятора позволит высвободить значительную часть времени машины на выполнение вычислительных операций и за счет

этого обеспечить возможность обработки большого потока информации в реальном масштабе времени при сравнительно невысоком быстродействии самой машины. В ассимиляторе каждый канал информации имеет собственную ячейку и вновь поступающие сведения записываются с одновременным стиранием старых, поэтому машина может оперировать с наиболее «свежими» данными. Устраняется обязательность поиска необходимых сведений, ввода взаимных блокировок и записи в буферный регистр. На лётно-испытательной авиабазе ВВС США такое устройство применено для обработки результатов испытания управляемых снарядов двумя цифровыми машинами UNIVAC-Scientific Mod. 1103-A. В этой системе все данные вводятся непосредственно в ассимилятор и затем используются для селекции, обработки и печати первой машиной. Часть информации из первой машины через промежуточное «общее» запоминающее устройство ассимилятора передается во вторую машину, которая в основном производит оценку и анализ полученных обработанных результатов. Выходные данные второй машины переписываются в выходную часть ассимилятора, из которой выбирается внешними устройствами также независимо от машин. Входная часть ассимилятора состоит из четырех запоминающих блоков («платформ») емкостью по 512 слов, общее запоминающее устройство и выходной запоминающий блок также имеют емкость по 512 слов. В три блока входной части вводится по 31 каналу. Организация этих блоков такова, что в них имеется по 16 зон, в каждой из которых записывается по одному «кадру» информации, т. е. результатов телеизмерений за один цикл коммутации каналов. В первых 31 ячейке записываются поступающие сигналы, а в остальных зонах производится при этом сдвиг ранее записанной информации на одну зону; во вторую переписывается то, что перед этим было записано в первой и т. д. За счет такой организации машина может «просматривать» в своей работе 16 последних кадров информации с учетом давности их поступления. Указывается, что такая схема особенно ценна для процессов интерполяции. Другой режим работы ассимилятора называется «замораживанием». При этом режиме вновь поступающая информация записывается в ячейки первой зоны, но сдвига ранее записанных кадров в остальных зонах не производится. В этом режиме машина может работать с наиболее свежими данными и, кроме того, неопределенно долго сохранять и использовать в работе ранее записанные сведения. Третий режим работы — «автоматическое сравнение» — имеет своей особенностью то, что при нем «возраст» записанных кадров информации определяется не по отношению к последним данным, а по отношению к тому времени, когда было произведено переключение в этот режим. Четвертый блок не имеет деления на зоны и представляет собой просто набор промежуточных регистров, через которые в машины может вводиться до 512 каналов информации, не введенных в первые три блока. Время обращения машин к ячейкам ассимилятора на 2—6 мксек. больше времени обращения к ячейкам их внутренних запоминающих устройств. Каждый блок ассимилятора может пропускать до 31 000 слов в 1 сек.

И. Д. Алимов

3 В272. Автоматическая система обработки данных. Ono. «Кэйсоку, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, 8, № 11, 764—766 (японск., рез. англ.)

Краткое описание автоматической системы обработки данных с помощью непрерывно-цифровых преобразующих устройств, приспособленных для работы с машиной «Бендикс G-15».

3 В273. Преобразователь цифровых данных в непрерывные. Тогино. «Кэйсоку, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, 8, № 11, 758—759 (японск., рез. англ.)

3 В274. Новое моделирующее устройство — компактное, экономичное, многостороннее —; Un nuovo calcolatore analogico. Compatto, economico versatile —. «Strum. e automaz.», 1959, 7, № 9, 397—398 (итал.)

Компания ДОННЕР (DONNER Scientific Company, Конкорд, Калифорния, США, представитель в Италии — D.I.S.I. — Nuclear Corporation, Милан) выпустила новое моделирующее устройство 3400, предназначенное для решения дифференциальных уравнений и функций передачи линейных и нелинейных. Может применяться также для автоматизации и для анализа и контроля производственных процессов. Устройство имеет 10 усилителей постоянного тока с высоким коэффициентом усиления, используемых как сумматоры или интеграторы. Результаты наблюдаются на встроенном вольтметре, на экране осциллографа или могут быть зарегистрированы на внешнем самопишущем устройстве. Могут решаться дифференциальные уравнения или уравнения Лапласа до 9-го порядка. Точность решения 0,1%. Дополнительная аппаратура: генератор функций — как степени, корни или функции с эмпирических графиков, электронное множительное устройство переменных функций, генераторы запаздывания — до 20 сек. Аппаратура смонтирована в корпусах стандартных размеров, устанавливаемых сверху основного моделирующего устройства. Питание автономное. Для удобства транспортировки моделирующее устройство может устанавливаться на каретке. Возможно параллельное соединение двух или нескольких моделирующих устройств.

И. В. Лебедев

3 В275. Анализатор АТРА для проблем железнодорожного транспорта. Łukaszewicz Leon. Analizator trakcyjny ATRA. «Arch. automat. i telemech.», 1959, 4, № 2, 177—206 (польск., рез. русск., англ.)

Электрический анализатор АТРА предназначен для тяговых расчетов, для расчетов скорости, а также для расчетов потребляемого тока и энергии на определенном пути. Характеристика тягового двигателя моделирована в анализаторе нелинейным преобразователем на диодах. При работе используются две бумажные перфоленты. На одной ленте находится запись градиентов профиля и инструкции о движении поезда. На другой ленте — скорости и диаграмма потребляемого тока, записанные в функции расстояния. Синхронное передвижение лент производит серводвигатель, скорость которого пропорциональна напряжению, отвечающему скорости поезда в данный момент времени. Время, затраченное на расчет, в несколько раз короче реального времени пробега.

Резюме автора

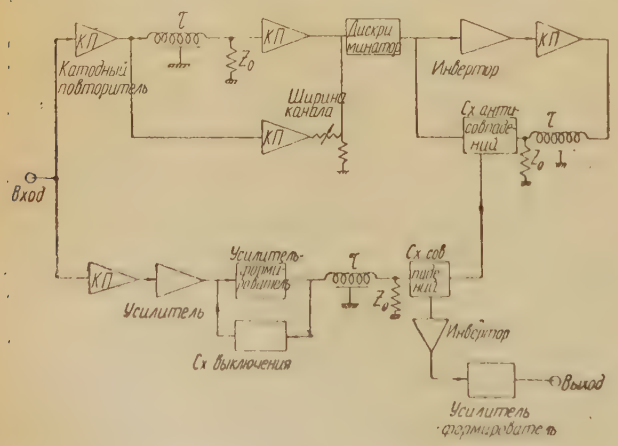
3 В276. Вычислительное устройство наземной системы наведения управляемого снаряда «Ника—Аякс». Ingerson W. E. The Nike Ajax computer. «Bell Labs Rec.», 1960, 38, № 1, 26—30 (англ.)

В наземную систему наведения зенитного управляемого снаряда «Ника—Аякс» (Nike Ajax) входят 3 радиолокационные станции, смонтированные в автоприцепах и соединенные между собой автоматическими линиями связи, и электромеханическое моделирующее устройство, в котором суммирование производится на операционных усилителях, а генерирование функций — на профилированных потенциометрах. В частности, на потенциометрах производится преобразование полярных координат цели, полученных от радиолокатора, в декартовы и затем в связанные оси снаряда. Вся задача перехвата воздушной цели состоит из трех этапов. На первом этапе, перед запуском, вычислительное устройство решает несколько уравнений точки встречи и определяет азимутальный угол плоскости, в которой находится точка встречи. На этот угол производится разворот гироскопа бортовой системы снаряда. На втором этапе, в начале полета, вычислительное устройство вырабатывает управляющие сигналы, необходимые для того, чтобы направить снаряд, запущенный в близком к вертикальному

направлении, то такой траектории, которая имела бы продолжение в точку встречи, близкое по форме к баллистической кривой. На последнем этапе наведения вычислительное устройство получает сигналы от радиолокационных станций сопровождения цели и снаряда и вычисляет по ним управляющие сигналы корректировки траектории в трехмерном пространстве. Ввиду того, что вычислительное устройство принимает участие в работе системы, составляющей замкнутую схему, приняты меры для повышения устойчивости системы в целом за счет осреднения полученных сигналов. Вырабатываемые вычислительным устройством управляющие сигналы ограничиваются в пределах зависящих от высоты и скорости полета. Все операционные усилители автоматически контролируются и корректируются по дрейфу нуля. В качестве датчиков азимута, угла, места и дальности на каждом радиолокаторе устанавливаются особо прецизионные потенциометры. Для предотвращения влияния утечки в проводах, соединяющих потенциометры с вычислительной машиной (длина которых может составлять несколько сотен метров), применен метод «проводящего экрана»: к экранирующей оплетке провода подводится напряжение, равное напряжению на движке потенциометра. Вычислительное устройство смонтировано в трех секциях в автоприцепе управления батареей снарядов. Выходные сигналы вычислительного устройства индуцируются на планшетах записи положения цели и снаряда. Индуцируется также время, оставшееся до момента встречи. В вычислительном устройстве имеются приспособления для самопроверки. Указывается, что вычислительное устройство используется для первоначальной калибровки системы с помощью вспомогательной цели для радиолокаторов. И. Д. Алимов

3 В277. Логарифмический амплитудно-импульсный анализатор с постоянной относительной ошибкой. Alberigi-Quaranta A., Bernardini C., Infante C., Quercia I. F. A logarithmic, constant percent error, pulse height analyzer. «Nucl. Instrum. and Methods», 1959, 5, № 2, 120—123 (англ.)

Данный одноканальный анализатор существенным образом отличается от общепринятых анализаторов с двумя пороговыми дискриминаторами. Из блок-схемы нетрудно понять принцип работы анализатора (см. рисунок). Ши-



рина канала определяется искусственной линией задержки. Входной импульс поступает на дискриминатор по двум цепям: через линию задержки и через катодный повторитель с переменным коэффициентом передачи. Если V_t — смещение дискриминатора, V_0 — амплитуда на дискриминатор во время $t=0$, $V_0 \exp(-\gamma z)$ — амплитуда на дискриминатор во время $t=\tau$. Дискриминатор будет срабатывать: дважды, если $V_t < V_0 \exp(\gamma L) < V_0$, один раз, если $V_0 \exp(-\gamma L) < V_t < V_0$, ни разу, если $V_0 \exp(-\gamma L) < V_0 < V_t$. Схемы антисовпадения и совпадения построены так, что на выходе появится задержанный на τ импульс только в том случае, если дискриминатор сработает один раз. Разрешающее время схемы совпадений около 10 мксек. Мертвое время анализатора около 0,15 мксек. На это время он запирается схемой выключения, что очень важно при анализе беспорядочных импульсов. Из приведенных в статье кривых очевидна линейность дискриминатора. Дрейф порога дискриминации около 0,1 *в*, дрейф ширины канала много меньше. Используя приведенный принцип, можно построить более высокоскоростной анализатор. А. Ф. Мевис

3 В278. Схема для электрического интегрирования и дифференцирования периодических процессов. Berger W., Hövelmann F., Kössler H.-J. Eine Schaltung zur elektrischen Integration und Differentiation periodischer Vorgänge, «Elektron. Rundschau», 1959, 13, № 9, 336—338 (нем.; рез. англ., русск.)

Известно, что интегрирование и дифференцирование с помощью *RC*-цепочек может осуществляться лишь приближенно. Для компенсации погрешностей авторы предлагают: 1) с помощью пентода обратить выходное напряжение *RC*-цепи в ток пропорциональной величины; 2) пропустить этот ток через цепочку, комплексное сопротивление которой подбирается так, чтобы максимально ослабить влияние множителя ошибки. Этот способ коррекции позволяет полностью устранить ошибку при дифференцировании. В связи с невозможностью последовательного включения конденсатора в анодную цепь пентода (из-за постоянной составляющей анодного тока), ошибка интегрирования не может быть полностью скомпенсирована, но в значительной мере ослабляется. Схема интегратора с коррекцией приведена на рис. 1; ее вы-

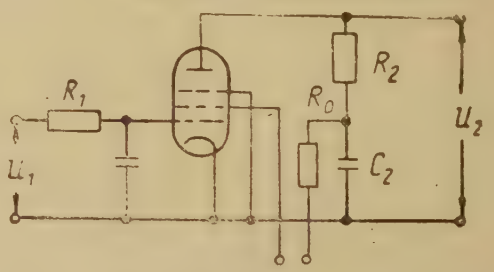


Рис. 1

ходное напряжение u_2 связано с входным u_1 соотношением

$$u_2 = -S \cdot \frac{u_1 R_2}{j\omega C_1 R_1} \cdot \frac{1 + \dfrac{1}{R_2/R_0 + j\omega C_2 R_2}}{1 + \dfrac{1}{j\omega C_1 R_1}}.$$

При $R_1C_1 = R_2C_2$ погрешность минимальна, но не может быть сведена до нуля. Схема точного дифференцирования приведена на рис. 2. Из характеризующего ее соотношения

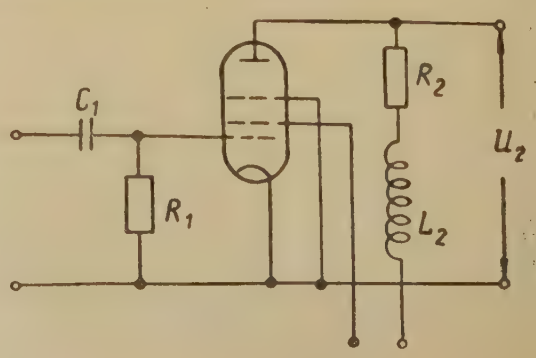


Рис. 2

$$u_2 = -SR_2 j\omega C_1 R_1 \cdot u_1 \cdot \frac{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

следует, что дифференцирование будет выполняться идеально при $L_2/R_2 = R_1C_1$. Ф. П. Тарасенко

3 В279. Цифровые и гибридные методы моделирования. Paul R. J. A., Maxwell M. E.. Digital and hybrid simulation techniques. «Control», 1960, **3**, № 22, 120—124 (англ.)

Рассматриваются тенденции развития электронных вычислительных машин как устройств для моделирования физических систем. Очень кратко указываются основные преимущества и недостатки аналоговых и цифровых машин с точки зрения их пригодности для моделирования и анализируется возможность применения гибридных моделирующих систем, в которых часть операций производится на аналоговых элементах, а часть на цифровых. Приводится блок-схема такого комплекса. Подробно описываются вопросы, связанные с генерированием нелинейных функций с помощью операции интегрирования. Библ. 9 назв. И. Д. Алимов

3 В280. Устройство для комбинированного аналого-цифрового решения. Schwartz B. L., Jenkinson G., Winslow L., Gordon B., Solomon J., A device to facilitate combined analog-digital computation, «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 212—214. Discuss., 215 (англ.)

Описано простое аналого-цифровое устройство с небольшой программной панелью, предназначенное для ограниченного круга задач. Устройство имеет выход в цифровой форме с пробивкой на перфокарту и с выходом на цифровой вольтметр. Устройство состоит из наборной панели программ и управления, переключателей на 22 положения, 20 реле для получения простейших логических действий, развязывающих диодов к этим реле, источника питания на 48 *в*, шин связи, индикации. На программной панели набирается задача с выводом данных через определенное время на перфокарту, которая далее может поступать на цифровую вычислительную машину в качестве носителя исходных данных. В качестве примера приводится рассмотрение общей постановки задач расчета системы катапультирования на самолете и расчета степени использования солнечной энергии батареями искусственных спутников и подход к их решению на данном устройстве. А. Ф. Смирнов

3 В281. Общие принципы действия моделирующего устройства «Hitachi». Миура, Нумакура. «Хитати хёрон, Hitachi hyoron», 1958, спец. вып. №27, 51—60 (японск.)

3 В282. Счетная линейка для радиотехников и электронщиков.—. Taschen-Rechenschieber für Radiotechniker und Elektroniker. «Funkschau», 1959, **31**, № 16, 401—402 (нем.)

Краткое описание выполнения вычислений на счетной линейке и некоторые дополнительные сведения о специализированной голландской счетной линейке «De Muiderkring NV» для радиотехников и электронщиков.

3 В283. Заметки по конечным автоматам без потерь информации. Huffman D. A. Notes on information-lossless finite-state automata, «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 397—405 (англ.)

Потеря информации имеет место в релейной схеме тогда, когда две или более входные последовательности могут приводить к получению одной и той же выходной последовательности, так как в этом случае невозможно однозначно определить входную последовательность по выходной последовательности. Многотактная схема (даже с бесконечным числом состояний) является схемой без потерь информации, если и только если не существует двух (не обязательно различных) ее состояний s_1 и s_2, двух различных входных последовательностей равной длины $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ и выходной последовательности $\{y_0\}$ таких, что как $\{x_1\}$, так и $\{x_2\}$ могут вести от s_1 к s_2 и давать при этом на выходе $\{y_0\}$. Однотактная схема без потерь не имеет никаких двух входных комбинаций, которые дают одну и ту же выходную комбинацию состояний. Введены понятия вероятностной количественной оценки входной $I_{вх}$ и выходной $I_{вых}$ информации, а также запасаемой $I_{зап}$ и теряемой $I_{тер}$ информации с точки зрения наблюдателя на выходе схемы. Без доказательства дана связь: $I_{вх} = I_{вых} + I_{тер} + \Delta I_{зап}$ Выделены два класса автоматов без потерь информации. П. П. Пархоменко

3 В284. Высокоскоростная процедура сортирования. Shell D. L. A high-speed sorting procedure. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 7, 30—32 (англ.)

Рассматривается метод сортировки объектов, т. е. распределение их в порядке возрастания определенных числовых индексов, например, номеров. Сортирование происходит на большой скорости и возможно на таких машинах, где объем памяти несколько больше числа объектов. Приводится блок-схема программы нового метода. Пусть в памяти хаотично расположены n объектов, обладающих определенным индексом. Сначала сравниваются попарно все индексы объектов, расположенные на расстоянии $m = m_1 = [n/2]$ (знак $[n/2]$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное $n/2$). Если эти объекты расположены в порядке возрастания индексов, то они остаются на местах. Если же больший индекс идет впереди меньшего, то объекты меняются местами. Затем снова проверяются все индексы, но уже берется расстояние $m = m_2 = [m_1/2]$ и так далее до тех пор, пока m не станет равным 1. Тогда все объекты окажутся расположенными в порядке возрастания их индексов. Метод требует немного ячеек помимо тех, которые заняты объектами. Экспериментально установлено, что время, требуемое для сортирования n элементов, пропорционально $n^{1,226}$. Аналитического определения скорости сортирования не производилось. С. А. Раскутин

3 В285. Автоматическое различие напечатанных цифр. Dietrich W. The automatic recognition of typewritten numbers. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 446—447. Discuss., 449 (англ.)

Все имеющиеся магнитные устройства распознавания знаков нечувствительны к запрязненной бумаге и поэтому не могут быть применены в таких случаях для выяснения содержания информации. В противоположность им существуют оптические системы воспроизведения формы знака. Эти системы распознают многочисленные знаки различной формы — либо алфавитные буквы, либо цифры. С другой стороны, необходимы специальные предосторожности для компенсирования эффекта загрязнения бумаги или смазывания букв. Эти системы распознавания используют специальное подчеркивание сосредоточенного в центре загрязнения знака и его отождествление с действительным. Распознаваемый знак движется и запоминается в сдвигающем регистре перпендикулярно развертке. Регистр не должен быть шире чем ширина знака. Движение распознаваемого знака и процесс развертки должны быть синхронны. После того, как процесс запоминания закончится, распознаваемый знак будет видим благодаря индикаторным лампочкам, расположенным в матрице по строкам и колонкам. Потухшие лампочки определяют форму знака. Для того чтобы знак электрически мог быть считан, необходимо его отцентрировать в определенной поверхности, например, в 6 колонках и 10 строках, и выдать сигнал присутствия знака, если информация будет приблизительно иметь размеры знака. В результате чего загрязнения будут ограничены. Если знак отцентрирован, а логика не может распознать его, то выдается импульс сдвига влево и знак вновь центрируется. Если загрязнения расположены между знаками, тогда используются два метода. Один из них заключается в том, что рассматривается коли-

чество темной информации в двух смежных колонках. Если количество потухших лампочек в колонке, расположенной ближе к началу, будет меньше, чем в следующей колонке, то дается сигнал о начале нового числа, которое запоминается и центрируется. Второй метод заключается в том, что вводятся две определенных колонки. Если вдоль всей длины одной из этих колонок нет потухших лампочек, то дается сигнал о начале новой цифры. Оба эти метода используются параллельно.

Ю. З. Рагозин

3 В286. Распознавание чисел с помощью следящего устройства. Sprick W., Ganzhorn K. Recognition of numerals by contour following. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 448, Discuss., 449 (англ.)

Существенной характеристикой каждой арабской цифры являются особые точки, характеризующие начало и конец написанной цифры, разрывы и изменение направления движения пера при ее написании. Посредством системы слежения возможно найти функции напряжения, соответствующие обеим сторонам цифры. Характеристические точки затем выявляются дифференцированием этих функций и преобразованием их в характеристическую форму импульса, который сравнивается с эталонной формой. Эти сравнения должны обеспечить условия независимости от временного совпадения и амплитудного равенства импульсов, а также дать определенную инвариантность относительно положения, размера наклона и искажения цифры без необходимости центрирования. Следящая система имитируется блок-схемой, которая развертывает цифру в горизонтальном направлении, подобно тому, как это происходит в телевизионных системах. Таким образом происходит превращение видеоимпульсов в два импульса, огибающая которых соответствует правой и левой стороне цифры. Преобразование видеоимпульсов в две формы огибающих импульсов обеспечивается ограничением кратковременной величины двух пилообразных напряжений, одна из которых синхронизованна, другая реверсивна развертывающему напряжению. Развертываемая цифра запоминается на запоминающем устройстве. Посредством логической схемы происходит сравнение по характеристическим точкам с цифрами от 0 до 9. На выходе схемы сравнения на соответствующих шинах появляются сигналы «да» «нет» совпадения с эталонными характеристическими импульсами. Скорость такой развертки 100 знаков в 1 сек.

Ю. З. Рагозин

3 В287. Распознавание изображений знаков автоматическими аналоговыми приборами. Taylor W. K. Pattern recognition by means of automatic analogue apparatus. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 447—448. Discuss., 449 (англ.)

Знаки представляют собой двумерные образы. Средняя интенсивность света, отраженного от элемента знака, улавливаемая фоточувствительным датчиком, преобразуется в электрический сигнал. Датчики, расположенные в матрицу, имитируют написанный знак, который необходимо фиксировать относительно датчиков. При наличии некоторого переключателя, механического или электронного, с заданной программой можно сравнивать имитируемый знак с эталонными знаками и при совпадении выдать код имитируемого знака в двоичном исчислении. В некоторых отношениях использование аналоговых устройств с матрицей датчиков может быть, по мнению автора, более выгодным.

Ю. З. Рагозин

3 В288. ХЕЙСТАК — программа для автоматизированных поисков химической литературы—. HAYSTAQ — a program for automatic searching of chemical literature. «Nat. Bur. Standards Techn. News Bull.», 1959, **43**, № 10, 192—193 (англ.)

Бюро стандартов и Патентное управление США совместно разрабатывают методы механизированных поисков патентов и литературы по химии. В предложенной для этой цели системе ХЕЙСТАК намечены пути предварительной обработки исходных данных и задаваемых вопросов, программа и подпрограммы самих поисков и способы оценки и выдачи получаемых ответов. В системе используется вычислительная машина СЕАК. При анализе каждого документа последовательно выделяются химические процессы, участвующие в них соединения и составные части последних — атомы, валентные связи или другие более крупные фрагменты структурной формулы. При поисках производится сравнение на совпадение или включение характеристик вопроса и характеристик документа на всех приведенных выше уровнях. Программа поисков включает подпрограммы как для поисков по довольно общим, так и по весьма специфичным вопросам, вплоть до учета топологической связанности различных функциональных групп внутри структурной формулы и даже указания самих валентных связей. Подпрограммы выполняются в таком порядке, чтобы документы, не отвечающие на вопрос, отсеивались как можно быстрее, например, еще до топологического рассмотрения структуры соединения.

В. П. Черенин

3 В289. Подход к проблемам вычислительной техники в Европе и Америке. Diebold John. A comparison of the approach to computers in Europe and America, «Process Control and Automat.», 1959, **6**, № 12, 530—532 (англ.)

В общих чертах описываются особенности организации работ в США и Западной Европе по созданию и эксплуатации комплексных систем для обработки данных. Отмечается, что США на 2—3 года опережает западноевропейские страны по опыту действительного использования систем автоматической обработки данных. В то же время многие из вычислительных систем, созданных в США, оказались несовершенными или неудачными, так как строились с излишней поспешностью и без достаточного обоснования. В Западной Европе, использующей американский опыт, проектирование и создание систем ведется более обоснованно, однако работа обычно проводится узкими коллективами и даже отдельными лицами, что придает разработкам излишнюю узость и специфичность. Часто существует отставание в математической, технологической и организационной подготовке вопросов, затрагиваемых намечаемым внедрением вычислительной машины.

Е. Ф. Бережной

3 В290. Вычислительные машины в прошлом и настоящем. Yates Dick. Computers yesterday and today, «Popul. Electron.», 1960, **12**, № 2, 69—72 (англ.)

Популярно излагается история развития вычислительных машин. В качестве примеров разработанных ранних машин приводятся устройства, построенные Паскалем (1642 г.), Морландом, Лейбницем (1682 г.) и др. Из современных машин указаны разработанные в США машины «Harvard-1» (1944 г.), ENIAC (1945 г.), UNIVAC (1950 г.). Очень кратко рассматриваются перспективы развития вычислительных машин.

И. Д. Алимов

3 В291 К. Система стандартных подпрограмм. Жоголев Е. А., Рюсляков Г. С., Трифонов Н. П., Шура-Бура М. Р. М., Физматгиз, 1958, 231 стр., илл., 6 р. 10 к.

Описывается система стандартных подпрограмм для вычислительной машины М-2, разработанная Вычислительным центром МГУ. Введение посвящено описанию общих принципов строения математических машин с программным управлением и особенностям выполнения арифметических действий в двоичной системе. В 1-й гл. дается общая характеристика машины и описание ее кода команд. Во 2-й гл. описываются некоторые особенности программирования на машине М-2: использование автоматического изменения режимов работы машины, способы преобразования команд, методика программирования циклов, способы выполнения передач управления. Более подробно описывается разработанный авторами метод плавающих масштабов, основанный на хранении масштабных множителей в отдельных ячейках

и на их автоматическом изменении в случае необходимости с помощью специальных подпрограмм. В 3-й гл. описывается организация библиотеки стандартных подпрограмм. При работе со стандартными подпрограммами в оперативной памяти на постоянных местах выделяется два массива ячеек: один для 11 рабочих ячеек, используемых подпрограммами, другой — для 32 стандартных констант. Все подпрограммы составлены так, что они могут быть помещены на любое место оперативной памяти. Необходимая привязка внутренних адресов осуществляется в момент ввода подпрограммы, который производится специальной программой ввода. Контроль ввода осуществляется с помощью контрольных сумм. Большинство подпрограмм для вычисления элементарных функций используют для аргумента и результата стандартные ячейки из числа рабочих ячеек. Постоянным местом хранения стандартных подпрограмм является перфолента. Вторая часть содержит непосредственное описание библиотеки подпрограмм. Подпрограммы описываются по общей схеме: название подпрограммы, описание алгоритма, логическая операторная схема, краткая характеристика программы, сама программа с подробными комментариями, стандартные константы. Основные подпрограммы: вводят с перфоленты, группа подпрограмм для режима плавающей запятой (перевод в двоичную систему, перевод в десятичную систему, целая и дробная части числа, синус и косинус, экспонента, корень квадратный, арктангенс, логарифм натуральный), аналогичная группа подпрограмм для режима фиксированной запятой, дополненная подпрограммой нормализации, группа более крупных подпрограмм для режима плавающей запятой (решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта, решение системы линейных алгебраических уравнений методом главных элементов, вычисление определенного интеграла методом Симпсона). А. П. Ершов

3 В292 К. Электронные цифровые вычислительные машины и использование их в науке и технике. Alt Franz L. Electronic digital computers. Their use in science and engineering. New York-London, Acad. Press, Inc., 1958, X, 336 pp. (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

3 В293. Новые применения вычислительных машин.—.Novel applications of computers. «Computers and Automat.», 1958, 7, № 3, 8—13 (англ.)

3 В294. Анализ экспериментальных данных на электронной вычислительной машине. Yates F., Healy M. J. R., Lipton S. L'analyse des expériences répétées sur calculatrice électronique. «Rev. statist. appl.», 1959, 7, № 2, 47—65. Discuss., 66—75 (франц.)

В 1954 г. статистический отдел в Ротхэмстеде (Rothamsted) получил электронную вычислительную машину «Эллиот-401». На машине в основном решаются статистические задачи и, в частности, статистические задачи для сельского хозяйства и биологии. Машина используется также для выполнения посторонних заказов. Указывается, что первоначально на машине решались только сложные задачи, связанные, например, с решениями дифференциальных уравнений. В дальнейшем при расширении запоминающего устройства и реконструкции устройств ввода и вывода на машине стали решать простейшие задачи обработки данных. Приводится краткое описание устройства машины и основ программирования. Указывается, что за 2,5 года эксплуатации машины составлено много программ и подпрограмм, используемых в настоящее время для статистических расчетов. Дается описание блок-схем многих программ и подпрограмм. Отмечаются трудности, возникшие при составлении программ, и проблемы контроля работы машины. Н. Н. Поснов

3 В295. Обработка данных, полученных фотоэлектрическим методом, на электронной вычислительной машине. Arp Halton C. Reduction of photoelectric observations by an electronic computer. «Astrophys. J.», 1959, 129, № 2, 507—512 (англ.)

3 В296. Статистический анализ ошибок цифрового вычислительного устройства по управлению огнем. Chapin Lawrey H., Whiteman I. R., Dixon W. Statistical error analysis of a fire control digital computer. «Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron.» (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 224—229 (англ.)

На примере корабельного вычислительного устройства управления стрельбой ракетами исследуются возможные ошибки работы системы с целью выяснить возможности нового устройства и принять меры к уменьшению ошибок. Устройство решает задачу геометрии прицеливания, поддерживает нужное направление прицеливания и отдает необходимые команды для стрельбы. Устройство имеет шестнадцать входов, к которым относятся данные с внешних датчиков, регулируемых констант и данных, набираемых от руки. Ошибки системы возникают от искажений входных сигналов, неточности передачи данных и неизбежных ошибок вычислений: округлений, приближений и так далее. Непосредственным способом анализа ошибок является решение всевозможных случаев геометрии прицеливания и исследования ошибок выходных данных машины. Но этот метод связан с огромными затратами усилий, к тому же он требует готового прототипа системы. Поэтому применялся статистический анализ работы системы. Выбранный метод дал возможность определить независимое влияние каждого фактора на результат с максимальной точностью, учесть влияние взаимодействия факторов, определить пределы в верности вычислений. Дается краткое описание процесса статистического анализа ошибок. В результате анализа получены оценки возможных ошибок, оценки величин стандартных отклонений выходных функций, определены возможности всей системы. Выяснено, что только два параметра в основном определяют выходные функции машины; влияние некоторых других параметров ничтожно. Это дает возможность направить инженерные усилия на важнейшие факторы и снижает затраты на те факторы, которые могут дать лишь небольшое улучшение. Применение статистического анализа ошибок вычислительных систем является сильным средством, связанным со сравнительно небольшой затратой усилий. С. А. Раскутин

3 В297. Применение пассивных цепей и сеток в качестве вычислительных систем непрерывного действия для расчета пространственного заряда и процессов диффузии в вакуумных и в полупроводниковых приборах. Čremošnik G., Frei A., Strutt M. J. O. New applications of impedance networks as analog computers for electronic space charge and for semiconductor diffusion problems. «Proc. I. R. E.», 1958, 46, № 5, Part 1, 868—877 (англ.)

Исследуются общие вопросы методики решения уравнений Лапласа (в частных производных) и Пуассона с помощью моделирования электрических цепочек и сеток *R* и *RC*. Решение ведется преимущественно с точки зрения расчета электровакуумных и полупроводниковых приборов — диодов и триодов. Наиболее сложным вопросом при расчете вакуумных электронных ламп является моделирование электрического поля и пространственного заряда в межэлектродном промежутке. Это моделирование осуществляется с помощью цепочек сопротивлений для диодов и сеток сопротивлений — для трехэлектродных ламп. Рассматриваются вопросы коррекции получаемых решений, учета конечных размеров и формы электродов, неравномерности поля в районе сетки

и т. п. Решение уравнений диффузии в полупроводниковых приборах моделируется цепочками *RC* (для диодов) и сетками *RC* (для триодов). Исследуются возможности расчета таких полупроводниковых приборов, как спасистор и т. п., туннельного эффекта, процессов рекомбинации. Приводятся многочисленные примеры моделирования вакуумных и полупроводниковых элементов, кривые распределения потенциалов, концентрации носителей заряда и других графических зависимостей. Библ. 13 назв.

А. А. Крупский

3 В298. Пример практического вычисления на моделирующем устройстве. Zimer J., Bary M.-F. Un exemple pratique de calcul sur un calculateur analogique. «Automation France», 1959, **5**, № 32, 121, 123—125 (франц.)

Популярная статья.

3 В299. Расчет колебаний давления в гидравлических устройствах на электронной вычислительной машине. Marchal M., Duc. J. Die elektronische Berechnung von Druckschwankungen in hydraulischen Anlagen. «Techn. Rundschau Sulzer», 1959, **41**, № 2, 137—142 (нем.)

3 В300. Применение вычислительной машины ИБМ-650 в гидравлике. Biesel F. Applications de l'ordinateur IBM 650 dans le domaine de l'hydraulique.» «Ingrs et techniciens», 1959, № 121, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77 (франц.)

3 В301. Расчет индукционных моторов на электронных вычислительных машинах. Bauer Mir. Výpočet řady indukčních motorů na samočinném elektronickém počítači. «Elektrotechn. obzor», 1959, **48**, № 6, 318—319 (чешск.)

3 В302. Требования к наведению и управлению в астронавтике. Roberson Robert E. On guidance and control requirements in astronautics, «J. Franklin Inst.», 1960, **269**, № 3, 196—220 (англ.)

Рассматриваются общие вопросы управления траекторией полета космического летательного аппарата, предлагается и анализируется общая схема организации разработки космического корабля. Разработка начинается с рассмотрения основных задач полета, времени и обстоятельств его совершения. На основании результатов этого этапа выбирается тип корабля или количество кораблей (например, при задаче создания цепи ретрансляционных станций — спутников Земли, выбирается их необходимое количество и расположение на орбите). Затем анализируется требующаяся траектория полета и выбирается силовая установка. После этого разрабатываются подсистемы, входящие в состав оборудования корабля. Приводится классификация космических полетов в зависимости от поставленных задач, наличия экипажа, вида траектории. Кратко рассматривается блок-схема системы автоматического управления полетом космического корабля и требования к таким системам, предъявляемые на кораблях различных классов по приведенной классификации.

И. Д. Алимов

3 В303. Применение цифровых вычислительных машин в системах управления производственными процессами. Hemy D. C., Kease W. J. The study of the application of a computer to production control. «Comput. J.», 1959, **2**, № 1, 24—38. Discuss., 38 (англ.)

Дается обзор применения электронных цифровых вычислительных машин в системах управления производственными процессами, который охватывает: 1) рассмотрение систем управления производственными процессами; 2) обсуждение характеристик цифровых вычислительных машин, которые способны выполнять работу по управлению производственными процессами; 3) краткое описание построения системы управления материалами и системы управления производством, в которых используются цифровые вычислительные машины. Рассматриваемые системы управления предназначены для предприятий, работающих по отдельным заказам или выпускающих продукцию мелкими партиями. При разработке системы управления конкретным производством необходимо: выявить основные производственные процессы, материалы и их временные зависимости, которые являются специфичными для изготавливаемого продукта и путем изменения которых достигается необходимая корректировка производственного цикла; установить возможные замены материала и изменения производственных процессов; составить подробный производственный план, включающий график поставки материалов, график изготовления отдельных деталей, сборок и т. д.; создать системы, контролирующие и стабилизирующие ход производственных процессов. Обсуждаются основные характеристики цифровых вычислительных машин: скорость вычисления; форма работы (в производственном цикле или вне его); емкость и экономичность запоминающих устройств и скорость доступа к информации; универсальность и простота конструкции машины в свете требований системы управления производством. Приводится блок-схема и основные данные цифровой вычислительной машины EMIDEC-1100. Описываются организация работ, основные документы и типовые ежедневные, еженедельные и ежемесячные операции системы управления материалами и системы управления производством. В приложении рассматриваются решения конкретных задач при разработке системы управления.

П. В. Тихонов

3 В304. Первая югославская цифровая система программного управления станками. Lukatela Georges L. The first Yugoslav machine tool with digital control. «IRE Trans. Industr. Electron.», 1959, № 10, 40—42 (англ.)

Фирма «РАЕ» (Югославия) в 1958 г. разработала и изготовила цифровую систему программного управления координатно-расточным станком. Система осуществляет только программное управление установкой стола станка по двум координатам с точностью ±20 *мк*. Программа вводится на перфоленте. Положение стола выдается измерительным устройством, включающим измерительный винт с щелевым диском и фототранзисторную приставку. Сигналы команды перфоленты расшифровываются в дешифраторе и сравниваются в цифровом регистре с сигналами положения стола. Сигнал рассогласования поступает в силовую следящую систему по положению, которая перемещает стол в заданное положение. Включение в систему следящего привода потребовало разработки реверсивного цифрового регистра, который должен оперировать с положительными и отрицательными числами и работать в низкочастотном диапазоне до нулевой частоты. Блок регистра построен на декатронах типа GS 10 C, которые могут только суммировать и вычитать, но специально разработанный блок определителя направления движения позволяет решать поставленную перед регистром задачу. Приведена блок-схема определителя направления движения и описан принцип его работы. Разработанная схема обеспечивает надежную работу реверсивного регистра во всех возможных ситуациях.

П. В. Тихонов

3 В305. Вычислительная машина управляет технологическим процессом. Madigan J. M. Computer controlled processing. «Chem. Engng Progr.», 1960, **56**, № 5, 63—67 (англ.)

На химическом заводе по производству хлорвинила и акринонитрила компании Гудрич (г. Колверт) установлена в январе 1960 г. цифровая система RW-300 (РЖМат, 1959, 938, 10533; 1960, 8428). Основное запоминающее устройство собрано на магнитном барабане, а быстродействующее — на магнитных сердечниках. Скорость вращения барабана 3600 об/мин. 64 дорожки на поверхности барабана разбиваются на секторы. Каждый сектор (всего их 128) содержит одно машинное слово длиной 8 двоичных разрядов, включая разряд знака. На одной из 64 дорожек записывается программа вычислений, которая периодически может меняться. Вторая до-

рожка используется для оперативного ввода содержимого внешнего накопителя в процессе вычислений. Третья дорожка используется для преобразования данных из аналоговой формы в цифровую. Из остальных 61 — две не используются вообще, и только 8 используются при нормальном режиме работы. Для оперативного контроля и управления необходимо следить не менее чем за 128 технологическими параметрами. 64 из них представляют температуру. Амплитуды электрических сигналов, снимаемых с термодатчиков, не превышают 10 *мв* и подлежат усилению. Остальные 64 представляют давление воздушного потока или температуру. Амплитуда этих сигналов лежит в пределах 0—10 *в*. Все 128 параметров регистрируются за 8 сек., преобразуются в цифровую форму и посылаются в запоминающее устройство на магнитном барабане. Регистрация производится параллельно с вычислениями в машине. Результаты вычислений преобразуются в аналоговую форму и подаются в цепь связи с управляемым объектом. Устройства ввода-вывода и преобразования работают с точностью 0,1%. Из программ, выполняемых машиной, основной является «ведущая стандартная программа», которая служит для проверки и охватывает основные блоки машины. Если в результате проверки обнаруживается неисправность, то машина останавливается и указывается место неисправности. Надежность вычислений и управления обеспечивается мероприятиями: 1) каждые 5 мин. регистрируются параметры управляемых процессов, и параметры, вышедшие из поля допуска, фиксируются печатью красными чернилами с указанием номера прибора, 2) каждые 20 мин. решаются контрольные уравнения, 3) каждый час прерываются оба процесса и производится проверка вычисленных функций, 4) каждые 8 час. производится расчет на оптимизацию хлорвинильного процесса. При этом подсчитываются новые контрольные точки, проверяется их логичность, 5) каждые 24 часа прерываются оба процесса и делается общий инженерный анализ деятельности дня. Указывается, что автоматизация охватывает 80% производства, что потребовало затрат на сумму в 225 000 долл. Даются виды контрольных уравнений. Приводятся примеры задач, которые машина решает при управлении процессами. Даны блок-схемы связи машины с объектами. В. Д. Савицкий

3 В306. Система релейного управления колебательным элементом. Knudsen Harold K. Maximum effort control for oscillatory element. «IRE Trans. Automat. Control», 1959, **4**, № 2, 112—120 (англ.)

Перепечатано из IRE Wescon Convent. Rec., 1959, № 4. Отмечаются преимущества релейных методов управления перед методами линейного управления системами автоматического управления (с. у.) с насыщаемыми элементами. Рассматривается с. у., содержащая усилитель с насыщением и колебательный элемент, имеющий единичный коэффициент усиления по постоянному току. Управление усилителем осуществляется с помощью вычислительного устройства, на вход которого подаются входной сигнал с. у. и сигнал обратной связи с выхода с. у. Назначение с. у. состоит в том, чтобы снизить искажение выходного сигнала при подаче на вход единичного импульса. Коэффициент усиления усилителя на линейном участке предполагается бесконечным. Уровни насыщения нормализованы и составляют +1 и —1. Поставлена задача об отыскании динамических характеристик нелинейного вычислительного устройства, обеспечивающего наилучшим образом выполнение требований, предъявляемых к с. у. Исследование ведется методом фазовой плоскости. Отмечаются возможные пути в области практического использования развитых в работе методов, в частности при исследовании фугоидных низкочастотных колебаний самолетов по оси тангажа.

Б. Е. Бердичевский

3 В307. Система цифрового программного управления для поворота стола. Smith C. B. Mbs counting circuit controls numerically programmed index table. «Electr. Manufact.», 1958, **61**, № 3, 138—142, 332 (англ.)

Имеется три класса дискретной позиционной системы JACY фирмы «Modern Engineering Service Co.» (США) для полуавтоматического и автоматического управления поворотом стола (диаметром 610 и 1140 *мм*) дыропробивных прессов типа JACY. Система I класса обеспечивает установку с точностью 30′, система II класса — с точностью 1′ и система III класса — с еще большей точностью (данные не приводятся). Стол пресса поворачивается червячной парой (червячное колесо жестко связано со столом), имеющей двухзаходную резьбу для выбора люфта, а сама винтовая линия выполнена с малым углом наклона, что обеспечивает самоторможение стола при его остановке. В системе II класса с выходным валом червячного колеса связан датчик, состоящий из кулачка с четырьмя выступами и контактного устройства. Кулачок делает один оборот при повороте стола на угол в 4′, и с контактного устройства выдается 4 сигнала, формируемых в импульсы, которые поступают на пятидекадный двоично-десятичный счетчик, выполненный на магнетронных лампах с переключающимся лучом. При позиционной установке данные счетчика сравниваются с командными данными (задаются числом минут), находящимися в релейном запоминающем устройстве, и при подходе к позиции скорость подачи стола снижается, а при установке стола в позицию кулачок датчика запирается штифтом, управляемым гидравлическим или пневматическим цилиндром. Схема управления (блок-схема приводится) имеет схему коррекции, которая вносит поправку при многократном повороте стола на угол, имеющий доли минут, состоящую из трехдекадного регистра, на котором устанавливаются десятые, сотые и тысячные доли минут угла поворота, и суммирующего трехдекадного циклического счетчика. При каждой установке стола на суммирующий счетчик последовательно передаются данные с регистра, и счетчик выдает один импульс на счетчик данных обратной связи каждый раз, когда сумма импульсов больше 500. При последующей установке данные суммирующего счетчика не гасятся и к ним вновь прибавляется дробная часть. Механические узлы привода стола выполнены с такой точностью, что накопленная ошибка при повороте стола на 360° не превосходит 8″. Повторяемость установки ±1. С. П. Кузнецов

3 В308. Выбор логической структуры и параметров вычислительной машины для программного управления. Анисимов Б. В., Кузин Е. С., Довженко Ю. М., «Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр.», 1959, № 2, 183—189

Предлагается блок-схема специализированной вычислительной машины для вычисления программы обработки для фрезерных станков с цифровым программным управлением при кодировании команд унитарным кодом (последовательность импульсов) или фазовым способом. Машина состоит из арифметического устройства, интерполятора, вводного и выводного узлов, запоминающих устройств и схемы управления. В арифметическом устройстве, которое может быть не быстродействующим, производится вычисление числа проходов фрезы, нахождение точек траектории движения фрезы, определение участков и шага интерполирования. Интерполятор, предназначенный для вычисления координат центра фрезы в различные моменты времени с учетом подачи и кодирования данных, должен быть быстродействующим. Интерполяцию для простоты схемы интерполятора целесообразно производить многочленом степени *n*. Для согласования работы арифметического устройства и интерполятора необходимо иметь буферное запоминающее устройство. Оперативное запоминающее устройство, из-за малого количества информации, можно выполнить на магнитном барабане. При кодировании команды унитарным кодом данные программы записываются на магнитную ленту, а при кодировании фазовым способом полученная лен-

та перезаписывается на отдельном устройстве перезаписи. Для уменьшения оборудования целесообразно построить машину по двоичной логике и исходные данные задавать двоичным кодом. Приводятся соображения о выборе параметров машины. С. П. Кузнецов

3 В309. Подготовка информации для фрезерных станков с программным управлением. Кузин Е. С. «Станки и инструмент», 1960, № 6, 4—7

Рассматривается ряд вопросов, связанных с автоматической подготовкой на вычислительных устройствах управляющей информации для фрезерных станков с программным управлением, обрабатывающих сложные объемные детали. Автор разбивает весь процесс подготовки информации на два этапа. На первом, наиболее сложном этапе, с помощью универсальной или развитой специализированной вычислительной машины производятся вспомогательные расчеты, расчет координат отдельных точек поверхности детали, переход в той или иной форме к эквидистантной поверхности, расчеты режимов резания и, как конечный результат, определение параметров последовательных отрезков траектории центра фрезы, лежащих в полученной эквидистантной поверхности. Исходное задание отдельных участков профиля может быть произведено либо уравнениями, либо в табличной форме. Автор считает, что человек должен задавать участки в более удобной для него форме, например, задавать плоскость тремя точками, а для вычислительной машины может оказаться рациональной другая форма, например, использование для плоскости уравнения вида $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. Приведены формулы для вычисления в общем случае координат точек эквидистантной поверхности. Для определения значений входящих в эти формулы частных производных автор предлагает через каждую данную точку поверхности детали предварительно проводить две параболы (второй или более высокой степени), лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Приведена формула для определения величины строчной подачи фрезы по известной допустимой высоте гребешков, радиусу фрезы, радиусу кривизны поверхности и углу наклона касательной в данной точке сечения. Указывается, что все вычисления на первом этапе представляют собой ряд стандартных арифметических и логических задач и поэтому оператор должен иметь в своем распоряжении библиотеку стандартных подпрограмм. Задачей оператора при этом явится только разбивка детали на участки и области обработки, математическое задание их и составление небольшой составляющей программы, связывающие стандартные подпрограммы. Для еще большего облегчения работы оператора предлагается создать несколько типовых схем вычислительного процесса, связывающих стандартные подпрограммы. При этом стандартные подпрограммы, являющиеся арифметическими операторами, связываются между собой другими подпрограммами, являющимися логическими операторами. В этих логических операторах можно использовать представленные двоичными числами специальные логические шкалы, определяющие направление вычислительного процесса. На втором этапе подготовки информации вычисляются промежуточные положения центра фрезы в последовательные моменты времени и производится кодирование конечной информации унитарным кодом, который, как указывается в статье, наиболее часто применяется в устройствах программного управления и наиболее легко реализуется на цифровых вычислительных устройствах. Расчеты на втором этапе можно описать единым алгоритмом и их целесообразно выполнять на специализированном цифровом вычислительном устройстве — интерполяторе. Отмечается, что интерполятор, выдающий промежуточные значения координат параметрически заданной кривой типа

$$x=a_2t^2+a_1t+x_0,\ y=b_2t^2+b_1t+y_0\ z=c_2t^2+c_1t+z_0,$$

где t — время, является очень гибким и позволяет необходимым образом связать со временем последовательные положения фрезы. Интерполятор при этом работает по принципу суммирования конечных разностей.

В. А. Брик

3 В310. Вычислительные машины и системы автоматического регулирования. Asbury A. Computers and control systems. «J. Instn Electr. Engrs», 1960, **6**, № 66, 335—338 (англ.)

Кроме некоторых общих соображений по поводу использования вычислительной техники в системах регулирования, статья содержит описание двух конкретных систем, в состав которых входят вычислительные устройства.

1. Станок для резки стального проката на отдельные бруски имеет два устройства для отрезания: первый нож отсекает передний конец заготовки, чтобы «подразнять» его, затем второй нож по очереди отсекает бруски. Зная длину всей заготовки, оператор должен решить, на какие бруски ее разрезать, и дать соответствующие сигналы на второй нож. Для этого оператор имеет список, в котором указано, сколько брусков той или иной длины нужно тому или иному потребителю. При этом может быть, что на станке идет резка различных сортов стали, и отдельным потребителям нужен прокат только определенных сортов. Задача оператора состоит в том, чтобы в соответствии с этим списком определить, на какие куски нужно разрезать данную заготовку таким образом, чтобы при этом получающийся ненужный остаток имел бы минимальную длину. Так как решение указанной задачи нужно производить за 2—3 сек., то она слишком трудна для человека. Приведена блок-схема вычислительного устройства, которое производит необходимые вычисления и дает команду на нож.

2. В качестве второго примера рассматривается система программного управления точным координатно-расточным станком. При необходимости сверления в заготовке многих отверстий большое значение приобретает возможность быстрой установки шпинделя последовательно в требуемые для сверления положения. Этому мешает наличие у станка значительной инерции. Приведена блок-схема системы управления станком, в состав которой входит цифровая вычислительная машина. Входной информацией для машины являются, с одной стороны, данные о требуемых координатах центров отверстий и, с другой стороны, поступающая от измерительных устройств информация о текущем положении шпинделя относительно стола и о величине тока через двигатель привода. Эта информация имеет дискретный характер. Дискретные данные, вырабатываемые вычислительной машиной, проходят через цифро-аналоговый преобразователь и управляют приводом станка, обеспечивая оптимальное по быстродействию движение. Приведено несколько графиков угловой скорости привода и тока двигателя. Приведена также логическая схема расчетов, производимых вычислительной машиной.

В. А. Брик

3 В311. Цифровые элементы в технике регулирования. Schwarze G. Digitale Elemente in der Regelungstechnik. «Automatisierung (DDR)», 1960, **3**, № 5, 220—223 (нем.; рез. русск.)

3 В312. Новая вычислительная машина непрерывного действия для решения систем линейных уравнений. Krishnamurthy E. V. Lilavati a new analogue computer for solving linear simultaneous equations and related problems. Part II. Design of model II and its application to the solution of secular equations. «Proc. Indian Acad. Sci.», 1958, **A48**, № 5, 269—283 (англ.)

Моделирующее устройство «Лилавати-модель II» предназначена для решения систем линейных уравнений и представляет из себя набор калиброванных потенциометров, источник питания и измерительную систему. Каждый потенциометр состоит из двухдекадного блока со-

противлений (R). С помощью этих потенциометров устанавливаются сопротивления, пропорциональные коэффициентам решаемых уравнений. Ток в цепи каждого потенциометра регулируется независимо с помощью переменного сопротивления. Измерения производятся с использованием нуль-гальванометра. Вычислительное устройство смонтировано в портативном блоке и удобно в эксплуатации. А. А. Крюков

3 В313. Специализированная вычислительная машина для гармонического синтеза и гармонического анализа. Заездный А. М., Рахович Л. М. «Электросвязь», 1960, № 6, 66—68

Кратко описана разработанная на кафедре электротехники Ленинградского электротехнического института связи им. М. А. Бонч-Бруевича специализированная цифровая вычислительная машина «Синтез», предназначенная для вычисления полиномов вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx,$$

где N и M — целые числа, которые могут принимать несколько возможных значений (до 100). В машине используется десятичная система счисления с двоично-пятеричным кодированием. Результаты вычислений печатаются и фиксируются в виде кривой на самопишущем приборе. Коэффициенты A_n и B_n вводятся в синтез в виде четырехзначных двоичных чисел. Машина выдает значения $f(x)$ для фиксированных значений x, отстоящих друг от друга на величину 0,9°; 3,6° или 9°. Вычисления производятся в любом интервале изменения x, не выходящей за пределы $0<x<2\pi$. Время всех вычислений (не считая времени набора коэффициентов) определяется формулой

$$T = \frac{(m+4)\,q\tau}{6} \text{ мин},$$

где m — общее число гармоник, τ — длительность тактового импульса (τ=0,06 сек.), q — число точек, в которых вычисляется функция. Кроме описанных операций гармонического синтеза, машина может решать задачу гармонического анализа. Коэффициенты разложения вычисляются машиной по формулам Бесселя:

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \cos\left(kn\frac{2\pi}{N}\right);$$

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(n\frac{2\pi}{N}\right);$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(n\frac{2\pi}{N}\right) \sin\left(kn\frac{2\pi}{N}\right).$$

Здесь n=1, 2, 3,..., κ — номера гармоник разложения, N — число интервалов, на которое делится период анализируемой функции. Можно выбирать N, равное 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 80 и 100. Анализ выполняется за 5÷48 мин. Машина содержит 500 реле и 3000 диодов. Перечислены некоторые задачи из области радиотехники и электросвязи, которые можно решать на «Синтезе»: расчет установившихся процессов автоматической системы при периодическом внешнем воздействии, расчет переходных процессов, расчет амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик по экспериментально полученным переходным или импульсным характеристикам, расчеты оптимальных режимов в некоторых нелинейных системах и др. В. А. Брик

3 В314. Статистическое программирующее устройство для обслуживания управляемых снарядов. Weissman Leon. Static programmer. For missile support. «Missile Design and Developm.», 1959, 5, № 10, 78—79, 114 (англ.)

Описывается программирующее устройство, выполненное на полупроводниковых триодах и магнитных сердечниках, предназначенное для определения отношения числа неотвеченных импульсов к числу импульсов запроса и для автоматического контроля работы устройства управления ракетами. Устройство подразделяется на четыре основных части: тактовую, счетную, логическую и переключающую. Тактовая частота устройства 1 *гц* с точностью ±1% в диапазоне температур от 0°С до 71°С. Счет выполняется в 3 десятичных разряда, причем двоичные триггера передают информацию на десятичный преобразователь, выполненный на лучевом магнетроне повышенной надежности и долговечности, который в свою очередь управляют 10-позиционным переключателем. Логические схемы и выходные переключатели выполнены на магнитных усилителях, работающих на несущей частоте 2800 *гц*. Все схемы выполнены с помощью печатного монтажа. О. В. Бачин

3 В315. Вычислительные машины — средство для автоматизации анализа результатов летных испытаний в реальном масштабе времени. Hintze Guenther. Computers — the answer to real-time flight analysis. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959. New York», 1959, 350—357 (англ.)

При летных испытаниях управляемых снарядов на полигоне целесообразно иметь устройства, которые могли бы обрабатывать данные, получаемые с помощью телеметрических устройств, непосредственно в ходе испытания, т. е. «в реальном масштабе времени». При такой обработке данных появляется возможность целенаправленно изменять режим полета, чтобы собрать необходимые сведения или избежать опасных режимов, которые могут привести к срыву дорогостоящего летного эксперимента. Рассматривается блок-схема оборудования полигона, включающего в себя вычислительные устройства для такой обработки данных и электронную модель испытываемого снаряда. На модели производится моделирование полета снаряда параллельно с полетом испытываемого снаряда, причем в нее вводятся точно такие же начальные условия, которые имеют место при запуске снаряда. Рассматривается математическая формулировка задачи моделирования и обработки данных, приводится блок-схема устройств и система решаемых уравнений. Приводятся требования к вычислительной машине, предназначенной для такой работы. Например, для моделирования снаряда требуется иметь порядка 600 операционных усилителей с соответствующим комплектом блоков нелинейности, а полный комплект аналогового вычислительного оборудования может содержать порядка 1300 усилителей. Важной особенностью работы такого оборудования является то, что на его подстройки и ввод данных должно затрачиваться мало времени. И. Д. Алимов

3 В316. Конструирование с помощью цифровых вычислительных машин. Charles J. Design by digital computer. Lynch. «Prod. Engng», 1960, **31**, № 15, 43—58 (англ.)

Популярно излагаются основы применения настольных цифровых вычислительных машин при решении инженерных задач. Указывается, что в настоящее время на рынке имеется 10 типов настольных цифровых вычислительных машин, из которых 6 типов построены полностью на транзисторах. Стоимость этих машин составляет от 20 до 100 тыс. долл. Приводится таблица основных характеристик этих машин. И. Д. Алимов

3 В317. Автоматические вычисления в тактической полевой армии. Crawford A. B. Automatic data processing in the tactical field Army. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif.», 1959, New York, 1959, 187—189 (англ.)

В статье описана система ARMYDATA, предназначенная для использования в тактической полевой армии, а также описан ход работы над новой вычислительной системой FIELDATA. В настоящее время установлена возможность применения вычислительных машин в тактических военных действиях. Департаментом Армии США принят четырехлетний план установки автоматических вычислительных систем (а. в. с.) в своих тактических организациях. В ближайшем будущем предполагается окончание работы над системой ARMYDATA. На нее воз-

ложены задачи по сбору и обработке информации, обмену информацией с другими системами и выдаче информации на командный пункт а. в. с. состоит из отдельных блоков. У источников числового входа стоят простые входные схемы. Связь входов с вычислительным центром и центров между собой составляют войсковую систему связи. В соответствии с нагрузкой на вычислительном центре работает одна или несколько вычислительных машин. Большое количество выходных устройств дает возможность получить любой вид выдачи информации, который может помочь командиру принять правильное решение, т. е. в виде карт, графиков, или кратких копий докладов. Система автоматизирует работу штаба по управлению, разведке и снабжению, что требует большой скорости реакции и большого объема памяти. В настоящее время разрабатывается новый тип а. в. с., названный FIELDATA. Эта система должна удовлетворить растущие требования подвижности и максимальной эффективности в бою. Для сокращения времени разработки работа над принципами работы и применения системы велась параллельно с разработкой ее оборудования. Были изучены методы использования информации в армии с целью максимального применения автоматизации. Предполагается объединить около 50 частных задач. Требования по каждой задаче составляются специалистами соответствующей области. Около двадцати отдельных групп анализировали свыше семидесяти различных возможностей применения а. в. с. Так как к работе были привлечены специалисты, не обладающие опытом анализа систем, была составлена инструкция, указывающая примерную форму и объем доклада и изложены основы применения а. в. с. и анализа систем. Доклады групп подвергались общему техническому обзору, чтобы определить возможность, полноту и степень зависимости от других областей применения. После этого группа производит окончательное уточнение деталей и определяется величина рабочей нагрузки на машину. Перед составлением детальной схемы машины будет уточнена область ее применения. Чтобы подготовить и проверить программы машины до того, как будут созданы сами машины, на машине ИБМ-709 была проведена имитация работы системы. В результате накоплен опыт хранения и выдачи информации, наблюдения за целью и т. д. Имитатор помогает проверить выбранные параметры машины и порядок кодов. Одновременно имитировалась система передачи информации, чтобы выяснить нужную числовую скорость, надежность и т. д. При этом существенно использовались распределения вероятностей и метод Монте-Карло. Полевые испытания должны явиться подтверждением результатов имитации, при этом имитирующая машина ИБМ-709 будет связана с той частью системы, которая в данный момент изучается, т. е. поставляет на вход числовой материал и снимает выходные данные. Большая часть изучения уже выполнена. Система в форме прототипа будет действовать в 1963 г. и будет соединять в себе все новейшие достижения вычислительной техники, т. е. новые миниатюрные универсальные схемы, соединения машины с машиной, автоматическое программирование.

С. А. Раскутин

3 В318. Межвузовская конференция по применению физического и математического моделирования в электротехнических задачах. Москва, 26—30 окт. 1959 г. Иванов-Смоленский А. В., Тетельбаум И. М. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1960, № 1, 145—147

3 В319. Электромеханические аналоговые вычислительные устройства для решения тригонометрических задач. Hölscher Eckhard. Elektromechanische Analogrechner zur Lösung trigonometrischer Aufgaben. «Elektrotechn. Z.», 1960, A81, № 11, 387—392, 2, 4, 5, 7 (нем.; рез. англ., франц.)

Рассматривается возможность решения тригонометрических задач с помощью синус-косинусных вращающихся трансформаторов, следящих систем и усилителей переменного тока. Приводятся принципиальные схемы преобразования координат на плоскости; построения угла, тангенс которого задается отношением двух переменных; получения электрических напряжений, пропорциональных тангенсу и секансу угла поворота ротора вращающегося трансформатора; дистанционной передачи угла поворота и прецизионного фазовращателя. В качестве примера сложной схемы рассматривается навигационное вычислительное устройство, вычисляющее дальность до цели и углы визирования ее. Приводятся некоторые данные о применяемых линейных регуляторах напряжения, тахогенераторах, электродвигателях и усилителях.

И. Д. Алимов

3 В320. Целесообразность использования счетно-решающих машин для решения задач в области электротехники. Avramescu Aurel. Oportunitatea recurgerii la maşini de calcul în probleme de electrotehnică. «Electrotehnica», 1960, 8, № 4, 109—116 (рум.; рез. русск., англ., нем., франц.)

3 В321. Расчет модели молекулы на электронной вычислительной машине. Schmid Erich W. Molekülmodellrechnungen mit elektronischen Rechenanlagen. I. Theorie und Programmierung. «Z. Elektrochem.», 1960, 64, № 4, 533—541 (нем.)

3 В322. Вычислительные и конторские машины. — «Тосиба рэбю, Toshiba Rev.», 1960, 15, № 3, 295—302 (японск.; рез. англ.)

Популярная статья, освещающая применение современных машин для проведения научных и производственных расчетов. Из вычислительных машин непрерывного действия, выпускаемых в Японии и используемых для научных вычислений, описывается большая машина с высокой точностью ТОСАК-II, машина, имеющая возможность работать с малой и большой скоростью ТОСАК-III и простая машина, решающая задачи, связанные с диффузией, ТОСАК-IV. Закончена разработка серии малых цифровых вычислительных машин ТОСБАК-2100 и разрабатывается серия средних цифровых вычислительных машин ТОСБАК-3100. Рассмотрено применение вычислительных машин для расчета коэффициентов усиления вакуумных ламп.

О. В. Бачин

3 В323. Цифровые разностные анализаторы для программирования движения по параболическим кривым. Воронов А. А., «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 5, 147—155

Рассмотрены возможности использования цифровых дифференциальных анализаторов в качестве управляющих машин для программного управления движением рабочих органов машины по заданному контуру. Библ. 6 назв.

Б. Бердичевский

3 В324. Цифровая вычислительная техника и промышленное оборудование. Исобэ. «Кэйсоку, J. Soc. Instrum. Technol., Japan», 1958, 8, № 11, 675—679 (японск.)

См. также: 3А22, 3А123

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс ЗВ выпуска)

А

Акаикэ 102
Акушский И. Я. 228
Алексеев П. И. 173
Анисимов Б. В. 308
Анучина Н. Н. 187
Артемов Г. А. 185
Атанасов С. Н. 222

Б

Байковский В. М. 134
Башаринов А. Е. 133
Безбородников М. Ф. 203
Бондаренко П. С. 171, 172
Быховский М. Л. 214

В

Воронов 323

Г

Гренадер У. 103
Гусев В. Д. 145

Д

Дзиннака 208
Дин Чуань-сун 191
Довженко Ю. М. 308
Дородницын А. А. 190

Ж

Жоголев Е. А. 291 К

З

Заездный А. М. 313
Захаров В. К. 27

И

Иванов-Смоленский А. В. 318
Иидзима 221
Инада 268
Исида 94
Исии 18
Исобэ 324

К

Кадзиура 245
Каялов Г. М. 215
Каясима 253
Коган Б. И. 217
Колмогоров А. Н. 48
Коробов Н. М. 211
Котова А. И. 56 К
Кузин Е. С. 308, 309

Л

Лебедев В. И. 175
Леонов В. П. 45
Леонов Ю. П. 139
Линник Ю. В. 17
Липатов Л. Н. 139
Лозинский С. Н. 56 К

М

Майоров А. В. 115
Маслов К. В. 57 Д
Мельников В. С. 131
Мешалкин Л. Д. 16, 58 Д
Миура 281
Морозов В. А. 135
Мулин С. М. 212

Н

Накамура 269
Нумакура 281

О

Оно 272

П

Пугачев Б. П. 198

Р

Рахович Л. М. 313
Розанов Ю. А. 44, 48
Розенблатт М. 103
Росляков Г. С. 291 К

С

Савинов О. Н. 213
Сакино 94
Сарманов О. В. 27, 39
Симада 253
Сиотани 99
Стогний А. А. 227
Соболь И. М. 210

Т

Такада 253
Тепляков И. М. 132
Тетельбаум И. М. 318
Тогино 273
Трифонов Н. П. 291 К

У

Уэмацу 94

Ф

Филиппова А. А. 113 Д
Флейшман Б. С. 51
Фишер И. З. 224

Х

Хасьминский Р. З. 40
Хрусталев А. Ф. 217

Ц

Цуцуми 245
Цыбульский Г. П. 170

Ч

Чайковская Э. Н. 204
Черкасов И. Д. 37
Черняк Ю. Б. 138
Чэнь Вэнь-Юань 191

Ш

Шура-Бура М. Р. 291 К

Э

Эстрин М. И. 118

Ю

Юшкевич А. А. 38

Я

Яненко Н. Н. 187

A

Acton F. S. 107 K
Adam A. 101
Alberigi-Quaranta A. 277
Albrecht R. F. 184
Alling D. W. 158
Alt F. L. 292 K
Amram Y. 257
Angell J. B. 249
Arp H. C. 295
Arsac J. 219
Asbury A. 310
Avramescu A. 320

B

Bagley P. R. 229
Ballieu R. 110 K
Bantegui C. G. 87
Barankin E. W. 1
Barton D. E. 9, 93
Bary M.-F. 298
Bauer M. 301
Beckman F. S. 196
Bell C. G. 226
Bellman R. 33
Bennett B. M. 62
Berger W. 278
Berger M. J. 223
Berghuis J. 216
Bernardini C. 277
Bertaut E. F. 12
Bertram J. E. 116
Best R. L. 259
Bielecka D. 119
Biesel F. 300
Biswas S. 147
Blackwell D. 25
Block S. M. 260
Bobillier P.-A. 232, 235
Bollermann W. 174
Borský V. 265
Bose P. K. 152
Boyarsky A. Y. 148
Brigham R. C. 226
Brown W. M. 140

C

Caironi M. 194
Cantelli F. P. 52
Carey W. M. 251
Cavé R. 161
Chacon R. V. 41
Chakravarti I. M. 59
Chapin L. H. 296
Chen Moy Shu-Teh 47
Clough R. W. 218
Consael R. 157
Cooper J. W. 223
Copeland A. H. 4
Court L. M. 95
Cox C. P. 65
Cox D. R. 144
Cramér H. 42
Crandall S. H. 130
Crawford A. B. 317
Cremošnik G. G. 297
Cruon R. 30

D

Dagnelie P. 98
Darwin J. H. 83
David F. N. 9, 64
Davies D. W. 242
Deltheil R. 112 K
Dempster A. P. 68
Derwidué L. 201
Desabie M. 149
Diebold J. 289
Dietrich W. 285
Dixon W. 296
Dobrev B. 126
Duc J. 299
Dugué D. 86
Dumas M. M. 97
Durbin J. 77

E

Elteren Ph. van 75
Estrin G. 254
Ezekiel M. 109 K

F

Fenves S. J. 218
Fenyő I. 247

Firescu D. 81, 82
Floyd R. W. 207
Fortet R. 6
Fox K. A. 109 K
Fox P. 188
Frei A. 297
Fritscher O. 199
Furstenberg H. 50

G

Gaede K.-W. 10
Ganzhorn K. 286
Gearing H. W. 233
Giardina B. 88
Ginsburg Th. 180
Glaser E. M. 78
Glenisson Y. 201
Goodman L. A. 84, 151
Gordon B. 280
Grenander U. 103, Ed. 106 K, 165
Greville T. N. E. 8
Grier Th. S. 231
Grosswald E. 169
Gschwind H. W. 271
Guillon H. 257

H

Hader R. J. 142
Hammersley J. M. 11
Hannan E. J. 80
Harris B. 114
Hatori H. 20—22
Hauptschein A. 114
Healy M. J. R. 162, 294
Heising W. P. 262
Hemy D. C. 303
Hennecke F. 192
Herbert E. 256
Heyn W. 124
Hickerson T. F. 220
Higgins S. F. 270
Hintze G. 315
Hodges J. L. Jr 25
Hofiman D. C. Ed 129 K
Hoffman W. C. 128 K, Ed. 129 K
Holland D. A. 163
Hölscher E. 319
Holt A. D. 258
Hooper J. W. 61, 143
Hoquetis B. P. 130
Hövelmann F. 278
Hudimoto H. 71
Huffman D. A. 283
Huron R. 112 K

I

Infante C. 277
Ingerson W. E. 276
Ishii G. 67

J

Jenkinson G. 280

K

Kac M. 105 K
Kahane J. P. 14
Kalaba R. 33
Kane G. E. 125
Karlin S. 29
Kaufmann A. 30
Kawata T. 49
Kease W. J. 303
Kemeny J. G. 54 K
Kemperman J. H. B. 69
Kendall D. G. 24
Keonjian E. 234, 246
Kitagawa T. 85
Klinken J. van 164
Knudsen H. K. 306
Koller S. 117
Kooy J. M. J. 216
Kössler H.-J. 278
Krishnamurthy E. V. 312

L

Laha R. G. 13
Lamperti J. 36
Lanczos C. 197
Lang H. A. 209
Leech F. B. 162
Lehmann E. L. 108 K
Leslie D. C. M. 90
Leveau M. 122
Lima G. 200
Lindgren B. W. 111 K
Lipton S. 294
Lister M. 189
Lock J. M. 255
Lowan A. N. 182, 186
Łukaszewicz L. 275
Lukatela G. L. 304
Lynch C. J. 316

M

Mc Elrath G. W. 111 K
Mc Gregor J. 29
Madigan J. M. 305
Malecot G. 35
Mallows C. L. 93
Mandl P. 3
Marchal M. 299
Marcum J. I. 121
Marcus S. M. 250
Masuyama M. 96
Matyáš J. 265
Maxwell M. E. 279
Meigniez R. 74
Mendenhall W. 142
Menger K. 53
Mennes L. B. M. 76
Mertens H. M. 243
Mock O. 225
Morimura H. 19
Morrison D. D. 195
Mosteller F. 155
Murnaghan F. D. 205

N

Neveu J. 5
Newman D. J. 7
Nitsche Joachim 177
Nitsche Johannes C. C. 177

O

Ødegård A. K. 154
Okamoto M. 26
Olds E. G. 60
Ollivier B. 257
Olsztyn J. 225
Ortlieb I. 167 D

P

Park J. H., Jr. 78
Parodi M. 28
Parzen E. 55 K, 79
Paul R. J. A. 279
Pearce S. C. 163
Pearson E. S. 89
Philip J. R. 181
Pillai K. C. S. 87
Postley J. A. 261
Putschi H. N. 246
Pyke R. 32

Q

Quenouille M. H. 104 K
Quercia I. F. 277
Quiceno H. G. 92

R

Raab A. 266
Radok J. R. M. 202
Rao C. R. 59
Reissig G. 126
Rényi A. 91
Roberson R. E. 302
Rokhsar A. E. 125
Rose M. E. 183
Rosenblatt M. 46, 103
Rosmann M. 244
Roy J. 66
Rutishauser H. 179

S

Sagi Ph. C. 150
Sarachik P. E. 116
Saxer W. 166 K
Schmid E. W. 321
Schmid P. 73
Schmidt J. D. 246
Schuff H. K. 239
Schwartz B. L. 280
Schwartz L. S. 114
Schwarze G. 311
Severo N. C. 60
Shapiro H. S. 43
Shapiro J. M. 23
Shell D. L. 284
Sheldon J. W. 178
Siebert W. H. 130
Silverman R. A. 43
Sirao T. 34
Skjervold H. 154
Slepian D. 141
Smid L. J. 100
Smith C. B. 307
Smith C. D. 63
Snell J. L. 54 K
Solomon J. 280
Soubies-Camy H. 252
Sprick W. 286
Steel T. 225
Stevens D. F. 209
Stiefel E. 176
Still W. L. 137
Stoller D. S. 143
Stockebrand T. C. 259
Strachey C. 230
Strong J. 225
Strutt M. J. O. 297
Stur D. 159

T

Taguti Gen-iti 123
Tatsuoka M. 155
Taylor W. K. 287
Teicher H. 15
Theil H. 61, 76
Tritter A. 225
Turner F. L. 267

U

Ura S. 127
Urbanik K. 31

V

Vashi D. G. 160
Vincze I. 72
Vredenduin P. G. J. 2

W

Wachspress E. L. 168
Wallmark J. T. 250
Walsh J. L. 248
Watt K. E. F. 153
Wegstein J. 225
Weisfeld M. 206
Weiss L. 70
Weissman L. 314
Welby B. G. 264
Wendt A. 193
Wette R. 156
White R. P. 8
Whiteman I. R. 296
Wilde E. de 120
Winslow L. 280
Wrench J. W., Jr 205

Y

Yates D. 290
Yates F. 294

Z

Zetterberg L.-H. 136
Zimer J. 298
Zubrzycki S. 146

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор докт. геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор канд. физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ МАТЕМАТИКА № 3 за 1961 г.

3 А. Общие вопросы	3А6
История математики. Персоналия	3А31
Преподавание математики	3А69
Основания математики и математическая логика	3А93
Теория чисел	3А128
Алгебра	3А156
Многочлены и линейная алгебра	3А159
Группы	3А178
Поля, кольца, алгебры и структуры	3А221
Алгебраическая теория схем связи и управления	3А292
Топология	3А317
Геометрия	3А375
Приложения геометрии	3А379
Элементарная геометрия	3А386
Аналитическая геометрия	3А391
Проективная и неевклидовы геометрии	3А403
Начертательная геометрия	3А412
Алгебраическая геометрия	3А420
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства	3А438
Геометрия n-мерного пространства	3А461
Теория относительности	3А482
Глобальная теория дифференцируемых многообразий	3А499
Метрические методы в геометрии	3А512
Выпуклые многообразия	3А518
Авторский указатель	
3 Б. Теория функций действительного переменного	3Б1
Теория множеств	3Б17
Приближение функций полиномами и их обобщениями	3Б28
Теория функций комплексного переменного	3Б52
Дифференциальные уравнения	
Обыкновенные дифференциальные уравнения	3Б146
Уравнения в частных производных	3Б208
Приложения к физике, технике и естественным наукам	3Б251
Интегральные уравнения	3Б323
Вариационное исчисление	3Б334
Анализ (другие вопросы)	3Б351
Числовые ряды	3Б376
Специальные функции	3Б392
Интегральные преобразования и операционное исчисление	3Б406
Приложения общих методов математического анализа	3Б414
Функциональный анализ	3Б423
Авторский указатель	
3 В. Теория вероятностей	3В1
Математическая статистика	3В59
Теория игр, исследование операций и математическая экономика	—
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов	3В114
Численные и графические методы	3В168
Таблицы	—
Вычислительные машины и математические приборы	3В225
Применение вычислительных машин	3В293
Авторский указатель	

014771/2
П.Я.Щ. 1568
ТЕХ. БИБЛИОТЕКЕ
7 1.12 РЖ ТВ

Цена 38 к.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

на 1961 год

Реферативный журнал «Математика» рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает по возможности всеобъемлющую информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям. В частности, освещаются работы по алгебраической теории схем связи и управления, применению теоретико-вероятностных и статистических методов в технике и естествознании, вопросы, связанные с теорией и эксплуатацией вычислительных машин и математических приборов, приводятся сведения об использовании вычислительных устройств и их элементов в технике.

Журнал выходит один раз в месяц.

К комплекту журнала в виде приложений будут даны годовые указатели: авторский, систематический и предметный.

Для удобства читателей наряду с обычными номерами будут издаваться три выпуска, объединяющих некоторые разделы журнала.

Условия подписки

На сводный том:

На год (за 12 номеров с указателями) 21-96

На 6 мес. (за 6 номеров без указателей) 9-24

На отдельные выпуски:

	На год (за 12 номеров)	На 6 м-цев (за 6 номеров)
Выпуск I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	7-20	3-60
Выпуск II. АНАЛИЗ	8-40	4-20
Выпуск III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ	4-56	2-28

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ В ПУНКТАХ ПОДПИСКИ «СОЮЗПЕЧАТЬ», ПОЧТАМТАХ, КОНТОРАХ И ОТДЕЛЕНИЯХ СВЯЗИ, ОБЩЕСТВЕННЫМИ УПОЛНОМОЧЕННЫМИ НА ЗАВОДАХ И ФАБРИКАХ, ШАХТАХ, ПРОМЫСЛАХ И СТРОЙКАХ, В УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ И УЧРЕЖДЕНИЯХ

ЗАКАЗЫ МОЖНО НАПРАВЛЯТЬ ТАКЖЕ В ОТДЕЛ ПОДПИСКИ И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО КОМБИНАТА ВИНИТИ ПО АДРЕСУ:

г. Люберцы, Московской области, Октябрьский проспект, д. 403.
Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка